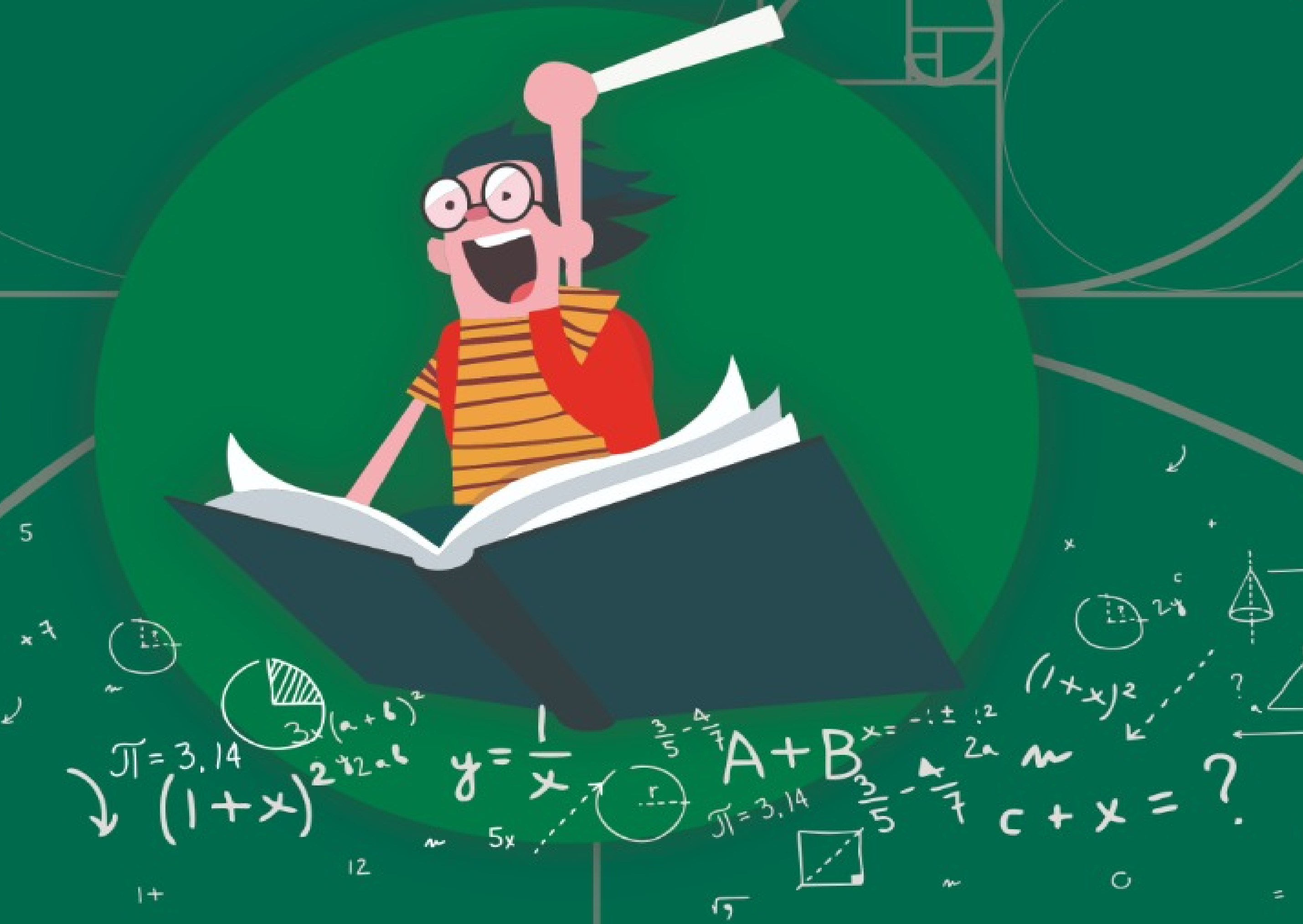
ENEM MATEMÁTICA: 2009 A 2016



Lúcia Helena Costa Braz
Gustavo Teixeira de Castro
Lorraine Borges Silva

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus Formiga

Departamento de Matematica
IFMG - Campus Formiga

ENEM MATEMÁTICA 2009 A 2016

Lúcia Helena Costa Braz
Gustavo Teixeira de Castro
Lorraine Borges Silva

Departamento de Matemática - IFMG Campus Formiga

lucia.helena@ifmg.edu.br

Outubro, 2020

ENEM MATEMÁTICA 2009 A 2016

Revisores técnicos:
Tabatha Helena da Silva
Francielly dos Santos Bento

Capa:
Luís Filipe Pereira Lopes + freepik.com

Ficha Catalográfica

Braz, Lúcia Helena Costa

F827e

ENEM matemática: 2009 a 2016 / Lúcia Helena Costa Braz; Gustavo Teixeira de Castro; Lorraine Borges Silva – Formiga, MG.:
Departamento de Matemática – IFMG - campus Formiga,MG., 2020.
303p.: il.

Livro eletrônico Modo de acesso: (endereço do livro) ISBN 978-65-87483-00-9

1. ENEM. 2. Questões resolvidas. 3. Matemática. 4. Números. 5. Álgebra. 6. Probabilidade e Estatística. 7. Geometria. I. Castro, Gustavo Teixeira de. II. Silva, Lorraine Borges. III. Título.

CDD 510

Apresentação

A ideia de escrever esse livro veio durante o desenvolvimento de um projeto de pesquisa desenvolvido no ano de 2017 por mim, professora Lúcia Helena, e pela aluna do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG campus Formiga no ano de 2017, atualmente, egressa do curso, Marina Andrade Alves da Silva. O referido projeto tinha o objetivo de investigar as concepções de contextualização em Matemática apresentadas por professores que lecionavam Matemática no Ensino Médio nas escolas públicas de Formiga, tendo como justificativas o fato de: as questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), aplicadas de 2009 a 2016, serem, em sua maioria, 86%, segundo Rodrigues, Nascimento e Brito (2017), contextualizadas; o ENEM, desde sua reformulação em 2008, propor uma avaliação contextualizada; o ENEM ser considerado, atualmente, uma das maneiras mais democráticas de se ingressar na educação superior e um significativo indicador da educação no Brasil. Ou seja, foi pensando na importância do ENEM no âmbito da educação no Brasil que resolvemos investigar as concepções que os professores de Matemática que atuam no Ensino Médio nas escolas públicas da cidade de Formiga, em Minas Gerais, tinham a respeito de trabalhar a Matemática de forma contextualizada e ainda, se estes professores trabalhavam, no dia a dia da sala de aula e em suas avaliações, questões interdisciplinares e contextualizadas, e até mesmo, se utilizavam questões de provas do ENEM. Pretendíamos, com esta pesquisa, criar reflexões acerca da contextualização na Matemática e sua importância. Os resultados dessa pesquisa podem ser encontrados em Braz e Silva (2017) e no artigo intitulado "A contextualização nas avaliações de Matemática dos professores que atuam no Ensino Médio nas escolas públicas de Formiga (MG)", também de autoria de Braz e Silva (2019).

Durante as discussões ocorridas entre mim e a orientanda Marina, surgiu a ideia de escrevermos um livro que tivesse as questões de Matemática das provas do ENEM aplicadas entre os anos de 2009 a 2016 organizadas por conteúdo e resolvidas, a fim de facilitar a inserção dessas questões nas aulas de Matemática da Educação Básica. Ao escrever um livro com as questões organizadas por conteúdo, acreditávamos que os professores poderiam, com mais facilidade, inserir as questões do ENEM em suas atividades em sala de aula, pois bastaria apenas os docentes identificarem, no livro, o conteúdo que estaria trabalhando e selecionar as questões que desejassem aplicar em sala de aula, inclusive no Ensino Fundamental. O projeto de extensão que deu vida a esse livro teve início em setembro de 2017 e, como Marina formaria naquele ano, o projeto não contou com sua participação direta, sendo, então, selecionados os alunos Gustavo Teixeira de Castro e Lorraine Borges Silva para atuarem comigo no seu desenvolvimento.

A fim de organizar as questões, tomamos como base a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica (BRASIL, 2016, p. 7) e, também, julgamos pertinente nos basearmos na forma como os conteúdos são apresentados nos livros didáticos que, normalmente, são o principal material didático utilizado pelos professores em sala de aula. Nesse sentido, a organização das questões ocorreu também tendo por base a coleção *Matemática Contexto & Aplicações* do autor Luiz Roberto Dante. A escolha dessa coleção se deve ao fato de a mesma ter sido escolhida pelos professores da cidade de Formiga (MG) para ser utilizado em todas as escolas estaduais da cidade. Quanto à BNCC, destacamos que o documento propõe cinco Unidades Temáticas correlacionadas, que orientam a formulação de habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, sendo elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, no entanto, ao levarmos em consideração a coleção citada acima, optamos por reduzir as Unidades Temáticas para quatro, inserindo as questões de Grandezas e Medidas em Números, pois, em Dante (2016), os conteúdos de Grandezas e Medidas aparecem no final do capítulo Conjuntos Numéricos como *Situações problemas envolvendo números reais, grandezas e medidas*. Importante destacar também que foi utilizada a BNCC do Ensino Fundamental, pois a do Ensino Médio ainda não foi publicada. Este livro apresenta as 360 questões das provas do ENEM aplicadas entre os anos 2009 a 2016 organizadas por conteúdo e divididas em 4 Capítulos, que correspondem às Unidades Temáticas acima citadas.

Entendemos, ao analisar as questões do ENEM, que elas englobam mais de um conteúdo matemático e, então, o critério que definimos para "classificar" o conteúdo de cada questão era analisar a pergunta. Por exemplo, a questão 159 de 2011, possui um gráfico para análise, então poder-se-ia pensar que ela poderia estar em Análise de Dados (Estatística), mas a pergunta da questão é: "[...] Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade [...]", ou seja, a pergunta remete a um cálculo de probabilidade que, para isso, vai demandar uma análise gráfica. Além disto, em algumas questões, colocamos duas resoluções, no intuito de mostrar que um dado exercício pode ser resolvido em contextos diferentes. Por exemplo, para resolver a questão 148 de 2009, entendemos que bastam as informações do enunciado, nem o gráfico apresentado na questão é necessário e, então, ela poderia ser resolvida até em turmas do Ensino Fundamental, pois envolveria, além da intepretação dos dados do enunciado, apenas cálculos de operações básicas com números inteiros. Mas, dependendo da abordagem que se dá para a questão, ela também poderia ser resolvida em turmas do 1º ano do Ensino Médio no estudo de funções do 1º grau.

No Capítulo 1 constam as questões classificadas em Números, sendo que este foi subdividido em 6 subcapítulos, a saber: Sistema de numeração decimal, Divisores e múltiplos, Operações básicas, Grandezas e Medidas, Matemática Financeira e Grandezas proporcionais.

O Capítulo 2 traz a parte de Álgebra, subdividido em Função, Matrizes e Sequências. O terceiro Capítulo apresenta as questões de Probabilidade e Estatística, subdivido em Análise Combinatória, Probabilidade e Estatística.

O quarto e último capítulo traz as questões de Geometria, sendo que estas foram divididas em Geometria Espacial, Geometria Plana, Trigonometria e Geometria Analítica.

Destacamos que, para "classificar" as questões, tivemos que ter o cuidado de resolver cada uma das 360 questões com muita atenção. E, neste caminho, identificamos conteúdos presentes no CBC (MINAS GERAIS, 2002) que não surgiram em nenhuma questão do ENEM no período analisado, dentre eles destacamos: semelhança de triângulos, sistemas de equações lineares, planificações de figuras tridimensionais, posição relativa entre retas e planos no espaço, números complexos, Binômio de Newton e Triângulo de Pascal, lugares geométricos e vetores.

Enfim, apesar do ENEM ser um exame voltado para concluintes do Ensino Médio, entendemos que suas questões podem ser trabalhadas em sala de aula desde Ensino Fundamental até em disciplinas básicas de Matemática em cursos superiores.

Peço a gentileza de que, caso erros sejam encontrados nesse material ou sugestões de alterações sejam necessárias, enviem mensagem para o endereço

lucia.helena@ifmg.edu.br

que terei prazer em analisar o que for solicitado, corrigir eventuais erros e efetuar alterações, na medida do possível.

Lúcia Helena Costa Braz

Agradecimentos

Agradecemos ao IFMG - Campus Formiga, em especial à Secretaria de Extensão, Pesquisa e Pós-Graduação (SEPPG), pela aceitação do projeto de extensão que deu origem tanto a esse material quanto às palestras e ao cursinho preparatório para o ENEM em Matemática para alunos dos terceiros anos do Ensino Médio das escolas públicas de Formiga e para toda a comunidade de Formiga e região.

Agradecemos imensamente às egressas do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG – Campus Formiga, Tabatha Helena da Silva e Francielly dos Santos Bento, por terem contribuído na revisão técnica desse livro.

A imagem e a estrutura da capa foram idealizadas por Luís Filipe Pereira Lopes, ao qual também agradecemos imensamente.

Finalizando, um novo agradecimento à Tabatha Helena da Silva que, ocupando o cargo de Auxiliar de Biblioteca no Campus Formiga, nos direcionou para uma forma de registro desse livro, e também à equipe da Rede de Bibliotecas do IFMG, em particular e em especial, à Rejane Valéria Santos, Bibliotecária/Documentalista e Coordenadora da Rede de Bibliotecas do IFMG, a qual foi imprescindível para o processo de registro.

Assinatura: Os autores

Sumário

CAPÍTULO 1

Números

Em Números, 33% das questões são de Grandezas Proporcionais. Fato que chamou a atenção, pois, os conteúdos envolvidos neste tema – grandezas direta e indiretamente proporcionais, divisão em partes proporcionais, escala, razão, regra de três simples e composta – não são listados no CBC (MINAS GERAIS, 2002) entre os Tópicos para o Ensino Médio, também não constam na coleção de livros para o Ensino Médio *Matemática Contexto & Aplicações*. Estes conteúdos constam no CBC do Ensino Fundamental para serem vistos nos 7º e 8º anos, o que corrobora nossa hipótese de que as questões do ENEM podem ser utilizadas, inclusive, em turmas do Ensino Fundamental.

1.1 Sistema de numeração decimal

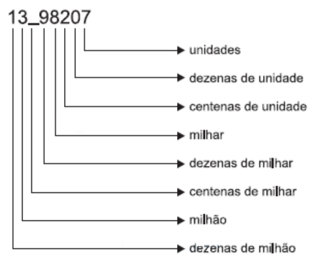
(ENEM 2012 – Q. 157)

João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número $\underline{1}\ \underline{3}\ \_\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{2}\ \underline{0}\ \underline{7}$, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de:

a) centena.
b) dezena de milhar.
c) centena de milhar.
d) milhão.
e) centena de milhão.

Resolução: O esquema a seguir mostra o "nome"de cada posição do númeral considerado. Veja:



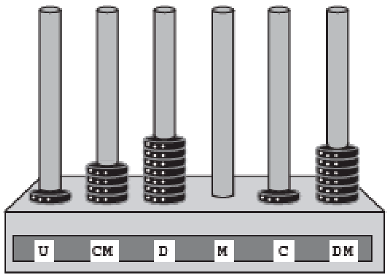
A posição ocupada pelo algarismo que falta é a das centenas de milhar.

Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 158)

O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda.

Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.



Nessa disposição, o número que está representado na figura é:

a) 46 171.
b) 147 016.
c) 117 064.
d) 460 171.
e) 610 741.

<u>Resolução</u>: A forma correta de posicionamento das ordens é :

$$CM\ DM\ UM\ C\ D\ U$$

Logo, o número que está representado na figura é:

$$400000 + 60000 + 100 + 70 + 1 = 460171$$

Alternativa: D

1.2 Divisores e múltiplos

1.2.1 Quantidade de divisores de um número

(ENEM 2014 - Q. 165)

Durante a Segunda Guerra Mundial, para decifrarem as mensagens secretas, foi utilizada a técnica de decomposição em fatores primos. Um número N é dado pela expressão $2^x.5^y.7^z$, na qual x, y, z são números inteiros não negativos. Sabe-se que N é múltiplo de 10 e não é múltiplo de 7.

O número de divisores de N, diferentes de N, é:

a) $x.y.z.$ b) $(x+1).(y+1).$ c) $x.y.z-1.$

d) $(x+1).(y+1).z.$ e) $(x+1).(y+1).(z+1)-1.$

Resolução: Sendo 2, 5 e 7 primos, a quantidade de divisores **positivos** de $N = 2^x.5^y.7^z$, diferentes do próprio N, é $(x+1)(y+1)(z+1)-1$.

Observação: Se considerarmos todos os divisores **inteiros** de N, o resultado será $2.(x+1)(y+1).(z+1)-1$.

Alternativa: E

1.2.2 Máximo divisor comum

(ENEM 2015 - Q. 146)

Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m.

Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir:

a) 105 peças. b) 120 peças. c) 210 peças.

d) 243 peças. e) 420 peças.

Resolução: Como o arquiteto quer que todas as peças tenham o mesmo tamanho e que não deixe sobras, ou seja, possua o maior tamanho possível, devemos determinar o máximo divisor comum (mdc) de 540, 810 e 1080.

Podemos deteminar o mdc de 540, 810 e 1080 de duas formas:

Fatorando cada um deles e considerando o produto entre as potências comuns de menor expoente: Como $540 = 2^2.3^3.5^1, 810 = 2^1.3^4.5^1$ e $1080 = 2^3.3^3.5^1$, o mdc(540, 810, 1080) = $2.3^3.5 = 270$.

O mdc pode ser determinado de modo semelhante ao mmc, porém só vamos usar os números que dividam todos os números ao mesmo tempo, ou seja, só os números que dividem 540, 810 e 1080, veja:

$$\begin{array}{l|l}
540, 810, 1080 & 2 \\
270, 405, 540 & 3 \\
90, 135, 180 & 3 \\
30, 45, 60 & 3 \\
10, 15, 30 & 5 \\ \cline{2-2}
2, 3, 6 & 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 270cm
\end{array}$$

O comprimento deve ser menor que 2 m, mas o comprimento que encontramos foi 270 cm = 2,7m. Logo, devemos dividir pelo menor número que usamos na divisão do mdc anteriormente, a fim de encontrar um comprimento menor que 2m e o maior possível, assim, o comprimento necessário é: $\frac{270}{2} = 135cm = 1,35m$.

Logo, a quantidade de peças obtidas foi:

$$\frac{(40 \times 540 + 30 \times 810 + 10 \times 1080)}{135} = \frac{56\,700}{135} = 420.$$

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 162)

O gerente de um cinema fornece anualmente ingressos gratuitos para escolas. Este ano serão distribuídos 400 ingressos para uma sessão vespertina e 320 ingressos para uma sessão noturna de um mesmo filme. Várias escolas podem ser escolhidas para receberem ingressos. Há alguns critérios para a distribuição dos ingressos:

1) Cada escola deverá receber ingressos para uma única sessão;

2) Todas as escolas contempladas deverão receber o mesmo número de ingressos;

3) Não haverá sobra de ingressos (ou seja, todos os ingressos serão distribuídos).

O número mínimo de escolas que podem ser escolhidas para obter ingressos, segundo os critérios estabelecidos, é:

a) 2.
b) 4.
c) 9.
d) 40.
e) 80.

Resolução: A quantidade de ingressos a serem fornecidos para as escolas deve ser um divisor comum de 400 e 320. Como não haverá sobra de ingressos, a quantidade de ingressos deve ser a maior possível, logo ela deve ser igual ao máximo divisor comum (mdc) entre 400 e 320.

As decomposições em fatores primos de 400 e 320 são, respectivamente: $400 = 2^4.5^2$ e $320 = 2^6.5$. Então, o mdc entre 400 e 320 é: $mdc(400, 320) = 2^4.5 = 80$.

Cada escola receberá 80 ingressos, logo, o número de escolas contempladas é:

$$\frac{400}{80} + \frac{320}{80} = 5 + 4 = 9.$$

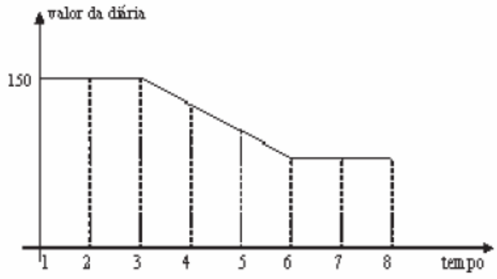
Alternativa: C

1.3 Operações básicas

1.3.1 Operações básicas com inteiros

(ENEM 2009 - Q. 148)

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.



De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de:

a) R$ 90,00. b) R$ 110,00. c) R$ 130,00.

d) R$ 150,00. e) R$ 170,00.

Resolução: Pela hospedagem de 7 dias, um hóspede paga: $7.R\$150,00 = R\$1050,00$. Na promoção de 8 dias: as 3 primeiras diárias custam R$150,00; da quarta até a sexta diária, diminui R$20,00 a cada dia, ou seja, $R\$130,00$ é o valor da quarta diária, $R\$110,00$ é o valor da quinta diária e a sexta diária custa R$90,00; a sétima e a oitava diárias têm o valor da diária do sexto dia, $R\$90,00$. Então, as 8 diárias, na promoção, custarão:

$$3.R\$150,00 + R\$130,00 + R\$110,00 + 3.R\$90,00 = R\$960,00$$

Logo, a economia do hóspede será de: $R\$1050,00–R\$960,00 = R\$90,00$.

Alternativa: A

Função do 1º grau

Essa questão também pode ser explorada no contexto de Função do 1º grau.

A hospedagem é uma função afim *f(x)* que depende da quantidade *x* de diárias.

Para 7 dias, temos: $f(x) = 7x$. Como cada diária custa $R\$150,00$, o valor a ser pago por 7 dias é: $f(150,00) = 7 \times 150 = R\$1050,00$.

Na promoção de 8 dias, *f(x)* é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 150,00 \text{ se } 1 \leq x \leq 3 \\ -20x + 210 \text{ se } 3 \leq x \leq 6 \\ 90,00 \text{ se } 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Para chegarmos à parte da função para $3 \leq x \leq 6$, podemos recorrer à informação de que ocorre um decrescimento de 20 em y para cada unidade em x, o que fornece:

$$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} y + b = \frac{-20}{1} x + b \Rightarrow$$

Como (3,150) é um ponto que pertence a essa reta, temos:

$$f(x) = -20x + b \Rightarrow 150 = -20.3 + b \Rightarrow b = 210 \Rightarrow f(x) = -20x + 210$$

(ENEM 2009 - Q. 158)

Para cada indivíduo, a sua inscrição no Cadastro de Pessoas Físicas (CPF) é composto por um número de 9 algarismos e outro número de 2 algarismos, na forma d_1 d_2, em que os dígitos d_1 e d_2 são denominados dígitos verificadores. Os dígitos verificadores são calculados, a partir da esquerda, da seguinte maneira: os 9 primeiros algarismos são multiplicados pela sequência 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 (o primeiro por 10, o segundo por 9, e assim sucessivamente); em seguida, calcula-se o resto r da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11, e se esse resto r for 0 ou 1, d_1 é zero, caso contrário $d_1 = (11-r)$. O dígito d_2 é calculado pela mesma regra, na qual os números a serem multiplicados pela sequência dada são contados a partir do segundo algarismo, sendo d_1 o último algarismo, isto é, d_2 é zero se o resto s da divisão por 11 das somas das multiplicações for 0 ou 1, caso contrário,$d_2 = (11-s)$.

Suponha que João tenha perdido seus documentos, inclusive o cartão de CPF e, ao dar queixa da perda na delegacia, não conseguisse lembrar quais eram os dígitos verificadores, recordando-se apenas que os nove primeiros algarismos eram 123.456.789. Neste caso, os dígitos verificadores d_1 e d_2 esquecidos são, respectivamente,

a) 0 e 9.
b) 1 e 4.
c) 1 e 7.
d) 9 e 1.
e) 0 e 1.

Resolução: Consideremos o número 123.456.789. Vamos determinar d_1 a partir dos dados do enunciado. Inicialmente, vamos determinar a soma dos produtos:

$$d_1 : (1\times 10)+(2\times 9)+(3\times 8)+(4\times 7)+(5\times 6)+(6\times 5)+(7\times 4)+(8\times 3)+(9\times 2) =$$
$$10+18+24+28+30+30+28+24+18 = 210$$

Como o resto da divisão de 210 por 11 é 1, segue que $d_1 = 0$.

De acordo com o enunciado, d_2 é obtido pela mesma regra, porém começando do segundo algarismo e sendo d_1 o último algarismo. Portanto:

$$d_2 : (2\times 10)+(3\times 9)+(4\times 8)+(5\times 7)+(6\times 6)+(7\times 5)+(8\times 4)+(9\times 3)+(0\times 2) =$$
$$20+27+32+35+36+35+32+27+0 = 244$$

Como o resto da divisão de 244 por 11 é 2, ou seja, é diferente de 0 e 1, segue que:

$$d_2 = (11-s) = 11-2 = 9.$$

Alternativa: A

(ENEM 2009 - Q. 161)

Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho, e R$ 1.000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25.000,00.

Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria:

a) manter sua proposta.

b) oferecer 4 máquinas a mais.

c) oferecer 6 trabalhadores a mais.

d) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.

e) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

Resolução: De acordo com o enunciado, o gasto da proposta, em reais, é de $4.(1000) = 4000$ com as máquinas, $12 \times (10) = 120$ com os trabalhadores, estes trabalhando 6 horas por dia cada, resultando em um gasto diário de $(4000 + 120) = 4120$ reais.

O gasto diário permitido com o gasto total máximo pretendido pelo fazendeiro é de $25000 : 6 = 4166,66$ reais.

Assim, o máximo de aumento permitido no gasto é de $4166,66 – 4120 = 46,66$ reais.

Logo, não é possível fornecer máquinas a mais e apenas quatro trabalhadores a mais.

Aumentando a jornada de 6 para 9 horas diárias (aumento de 3 horas em total de 6 corresponde a 50% de aumento), a produção diária sofreria um aumento de 50%, o que corresponde a um aumento de $0,5 \times 20 = 10$ hectares por dia, totalizando, os 30 hectares diários necessários.

Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 143)

A classificação de um país no quadro de medalhas nos Jogos Olímpicos depende do número de medalhas de ouro que obteve na competição, tendo como critérios de desempate o número de medalhas de prata seguido do número de medalhas de bronze conquistados. Nas Olímpiadas de 2004, o Brasil foi o décimo sexto colocado no quadro de medalhas, tendo obtido 5 medalhas de ouro, 2 de prata e 3 de bronze. Parte desse quadro de medalhas é reproduzida a seguir.

Classificação	País	Medalhas de ouro	Medalhas de prata	Medalhas de bronze	Total de medalhas
8º	Itália	10	11	11	32
9º	Coreia do Sul	9	12	9	30
10º	Grã-Bretanha	9	9	12	30
11º	Cuba	9	7	11	27
12º	Ucrânia	9	5	9	23
13º	Hungria	8	6	3	17

Disponível em: http://www.quadroademedalhas.com.br. Acesso em: 05 abr. 2010 (adaptado).

Se o Brasil tivesse obtido mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, sem alteração no número de medalhas dos demais países mostrados no quadro, qual teria sido a classificação brasileira no quadro de medalhas das Olimpíadas de 2004?

a) 13°.

b) 12°.

c) 11°.

d) 10°.

e) 9°.

Resolução: Com base nos dados informados, se o Brasil ganhasse mais 4 medalhas de ouro, 4 de prata e 10 de bronze, ele ficaria com 9 medalhas de ouro, 6 de prata e 13 de bronze. Sendo assim, ele empataria com os países que tinham 9 medalhas de ouro.

Como o primeiro critério de desempate é o número de medalhas de prata, o Brasil ficaria na 12° colocação, posição ocupada, de acordo com a tabela, pela Ucrânia.

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 142)

Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas.

A quantidade de cartas que forma o monte é:

a) 21. b) 24 c) 26.
d) 28. e) 31.

Resolução: A quantidade de cartas que forma o monte é:

$$52-(1+2+3+4+5+6+7)=52-28=24 \text{ cartas.}$$

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 146)

Um maquinista de trem ganha R$ 100,00 por viagem e só pode viajar a cada 4 dias. Ele ganha somente se fizer a viagem e sabe que estará de férias de 1º a 10 de junho, quando não poderá viajar. Sua primeira viagem ocorreu no dia primeiro de janeiro. Considere que o ano tem 365 dias.

Se o maquinista quiser ganhar o máximo possível, quantas viagens precisará fazer?

a) 37. b) 51. c) 88.
d) 89. e) 91.

Resolução:

1ª. interpretação

Admitindo-se que cada viagem dure quatro dias e que o maquinista não pode retornar da viagem em período de férias, teremos:

1) de 1°. de janeiro até 31 de maio, são 151 dias e neste período ele faz, no máximo, 37 viagens, pois 151 = 37 . 4 + 3

2) De 11 de junho até 31 de dezembro, são 204 dias e neste período ele faz, no máximo, 51 viagens, pois 204 = 51 . 4

3) No total, o número máximo de viagens é 37 + 51 = 88.

2ª. interpretação

Admitindo-se que a viagem dure um, dois ou três dias (visto que a questão não especifica a duração da viagem), e não pode fazer mais do que uma viagem a cada quatro dias, haveria ainda a possibilidade de viajar no dia 29 de maio, o que totaliza 89 viagens.

(ENEM 2012 - Q. 156)

Nos shopping centers costumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques. Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo *shopping* custa R$ 3,00 e que uma bicicleta custa 9 200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é:

a) 153. b) 460. c) 1 218.

d) 1 380. e) 3 066.

Resolução: Para que uma criança que recebe 20 tíquetes por período acumule 9200 tíquetes (que lhe permitem trocá-los pela bicicleta), ela deverá jogar por $\frac{9200}{20} = 460$ períodos.

Como o preço de cada período é de R$ 3,00, o valor gasto será:

$$460 \times R\$3,00 = R\$1380,00.$$

Alternativa: D

Essa questão também pode ser resolvida no contexto de Regra de três simples.

(ENEM 2012 - Q. 169)

Há, em virtude da demanda crescente de economia de água, equipamentos e utensílios como, por exemplo, as bacias sanitárias ecológicas, que utilizam 6 litros de água por descarga em vez dos 15 litros utilizados por bacias sanitárias não ecológicas, conforme dados da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Qual será a economia diária de água obtida por meio da substituição de uma bacia sanitária não ecológica, que gasta cerca de 60 litros por dia com a descarga, por uma bacia sanitária ecológica?

a) 24 litros. b) 36 litros. c) 40 litros.

d) 42 litros. e) 50 litros.

Resolução: Para gastar 60 litros por dia, foram dadas 4 descargas na bacia sanitária que gasta 15 litros por descarga. Com a bacia ecológica, seriam gastos $4 \times 6 = 24$ litros.

A economia diária de água será de 60–24 = 36 litros.

Alternativa: B

Regra de três simples

Essa questão pode ser resolvida no contexto de proporcionalidade, através de regra de três. Vejamos:

De acordo com o enunciado, temos que:

•Bacia não ecológica

15 litros gastos —— 1 descarga
60 litros gastos —— x descargas

$$x = \frac{60}{15} = 4 \text{ descargas.}$$

•Bacia ecológica

6 litros gastos —— 1 descarga
y litros gastos —— 4 descargas

$$y = 6 \times 4 = 24 \text{ litros gastos.}$$

Economia diária: 60–24 = 36 litros

(ENEM 2014 - Q. 174)

Diariamente, uma residência consome 20160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6cm \times 8cm$. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

Resolução: De acordo com o enunciado, a cada retângulo de dimensões $6cm \times 8cm$,temos uma diagonal de:

$$d^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow d^2 = 100 \Rightarrow d = 10cm.$$

Assim, por dia, cada célula produz $10 \times (24) = 240Wh$ e 100 células produzem $100 \times (240) = 24000Wh$.

Desse modo, há (24000 - 20160) = 3840 Wh a mais que o consumo inicial, logo, devem ser retiradas:

$$\frac{3840}{240} = 16 \text{ células.}$$

Alternativa: A

(ENEM 2015 - Q. 174)

Para economizar em suas contas mensais de água, uma família de 10 pessoas deseja construir um reservatório para armazenar a água captada das chuvas, que tenha capacidade sufuciente para abastecer a família por 20 dias. Cada pessoa da família consome, diariamente, $0,08m^3$ de água.

Para que os objetivos da família sejam atingidos, a capacidade mínima, em litros, do reservatório a ser construído deve ser:

a) 16. b) 800. c) 1 600.

d) 8 000. e) 16 000.

Resolução: De acordo com o enunciado, de modo que essa família de 10 pessoas, fiquem abastecidas com água por 20 dias, será construído um reservatório, com capacidade mínima, em litros, de:

$$10 \times 20 \times 0,08m^3 = 16m^3 = 16000 \text{ litros.}$$

Alternativa: E

(ENEM 2014 - Q. 176)

Um executivo sempre viaja entre as cidades A e B, que estão localizadas em fusos horários distintos. O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas. Ele sempre pega um voo que sai de A às 15h e chega à cidade B às 18h (respectivos horários locais).

Certo dia, ao chegar à cidade B, soube que precisava estar de volta à cidade A, no máximo, até as 13h do dia seguinte (horário local de A).

Para que o executivo chegue à cidade A no horário correto e admitindo que não haja atrasos, ele deve pegar um voo saindo da cidade B, em horário local de B, no máximo à(s):

a) 16h. b) 10h. c) 7h.

d) 4h. e) 1h.

Resolução: O tempo de duração da viagem de avião entre as duas cidades é de 6 horas, assim, quando a pessoa decolou às 15 h da cidade A, a hora na cidade B era de

$18 - 6 = 12$ h. Assim, podemos perceber que, entre as cidades A e B, há diferença de fuso horário de (15 - 12) = 3 horas, sendo maior em A. Então, quando forem 13 h em A, serão 10 h em B, assim, para chegar na cidade A nesse horário, ele teria que decolar as 4 h da cidade B, já que a viagem leva 6 h.

Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 179)

Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

Recipiente I: 0,125 litro
Recipiente II: 0,250 litro
Recipiente III: 0,320 litro
Recipiente IV: 0,500 litro
Recipiente V: 0,800 litro

O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

a) I. b) II. c) III.

d) IV. e) V.

Resolução: O secretário de saúde comprou 16 galões de álcool em gel com 4 litros de capacidade cada um, totalizando $16 \times 4 = 64$ litros de álcool em gel.

Essa quantidade de álcool deve ser distribuída entre 10 escolas, sendo que, em cada uma delas, terão 20 galões, totalizando $10 \times 20 = 200$ galões.

Assim, a capacidade do galão a ser utilizado é $\frac{64}{200} l = 0,320 l$, que é o recipiente III.

Alternativa: C

1.3.2 Operações básicas com frações/decimais

(ENEM 2009 - Q. 144)

A música e a matemática se encontram na representação dos tempos das notas musicais, conforme a figura seguinte.

Um compasso é uma unidade musical composta por determinada quantidade de notas musicais em que a soma das durações coincide com a fração indicada como fórmula do compasso. Por exemplo, se a fórmula de compasso for $\frac{1}{2}$, poderia ter um compasso ou com duas semínimas ou uma mínima ou quatro colcheias, sendo possível a combinação de diferentes figuras.

Um trecho musical de oito compassos, cuja fórmula é $\frac{3}{4}$, poderia ser preenchido com:

a) 24 fusas.

b) 3 semínimas.

c) 8 semínimas.

d) 24 colcheias e 12 semínimas.

e) 16 semínimas e 8 semicolcheias.

Resolução: Inicialmente, devemos calcular quanto valem 8 compassos de $\frac{3}{4}$.

$$8 \text{ de } \frac{3}{4} = 8.\frac{3}{4} = \frac{24}{4} = 6$$

Então, a alternativa correta para essa questão será aquela que apresentar 6 como resultado da fórmula do compasso.

Por meio do método de tentativas, verificaremos a alternativa correta.

a) 24 fusas:

$$1 \text{ fusa} = \frac{1}{32}, \text{ então 24 fusas de } \frac{1}{32} \text{ é?}$$

$$24 \text{ de } \frac{1}{32} = 24.\frac{1}{32} = \frac{24}{32} = 0,75.$$

Como 0,75 é diferente de 6, temos que essa não é a alternativa correta.

b) 3 semínimas:

$$1 \text{ semínima} = \frac{1}{4}, \text{ então 3 semínimas de } \frac{1}{4} \text{ são?}$$

$$3 \text{ de } \frac{1}{4} = 3.\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

A alternativa b não é a correta.

c) 8 semínimas:

$$1 \text{ semínimas} = \frac{1}{4}, \text{ então 8 semínimas de } \frac{1}{4} \text{ são?}$$

$$8 \text{ de } \frac{1}{4} = 8.\frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

A alternativa c não é a correta.

d)24 colcheias e 12 semínimas.

Na alternativa d, devemos efetuar a soma entre: 24 colcheias + 12 semínimas.

$$1 \text{ colcheia} = \frac{1}{8} \text{, então 24 colcheias de } \frac{1}{8} \text{ são ?}$$
$$24 \text{ de } \frac{1}{8} = 24.\frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3.$$
$$1 \text{ semínima} = \frac{1}{4} \text{, então 12 semínimas de } \frac{1}{4} \text{ são ?}$$
$$12 \text{ de } \frac{1}{4} = 12.\frac{1}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

$$24 \text{ colcheias} + 12 \text{ semínimas} = 3 + 3 = 6$$

Obtivemos 6 como resultado da fórmula do compasso. Sendo assim, a alternativa d é a resposta correta para essa questão.

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 149)

Observe as dicas para calcular a quantidade certa de alimentos e bebidas para as festas de fim de ano:
Para o prato principal, estime 250 gramas de carne para cada pessoa.
Um copo americano cheio de arroz rende o sufuciente para quatro pessoas.
Para a farofa, calcule quatro colheres de sopa por convidado.
Uma garrafa de vinho serve seis pessoas.
Uma garrafa de cerveja serve duas.
Uma garrafa de espumante serve três convidados.
Quem organiza festas faz esses cálculos em cima do total de convidados, independente do gosto de cada um.

Quantidade certa de alimentos e bebidas evita o desperdício da ceia. **Jornal Hoje.** 17 dez. 2010 (adaptado).

Um anfritrião decidiu seguir essas dicas ao se preparar para receber 30 convidados para a ceia de Natal. Para seguir essas orientações à risca, o anfitrião deverá dispor de:

a) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

b) 120 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

c) 75 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

d) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 30 de cerveja e 10 de espumante.

e) 7,5 kg de carne, 7 copos americanos e meio de arroz, 120 colheres de sopa de farofa, 5 garrafas de vinho, 15 de cerveja e 10 de espumante.

Resolução: Considerando que o anfitrião é um dos 30 convidados, para realizar a festa serão necessários:

•$250g \times (30) = 7500g = 7,5kg$ de carne;

• $\frac{1}{4}$ de copo $\times(30) = 7,5$ copos de arroz;

•4 colheres $\times(30) = 120$ colheres de farofa;

• $\frac{1}{6}$ de garrafa $\times(30) = 5$ garrafas de vinho;

• $\frac{1}{2}$ de garrafa $\times(30) = 15$ garrafas de cerveja;

• $\frac{1}{3}$ de garrafa $\times(30) = 15$ garrafas de espumante.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 138- Comparação de números decimais)

O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.

Para colocar o pistão no motor que está sendo consertado, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.

Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro:

a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

Resolução: A diferença entre o pistão de 68 mm de diâmetro para os demais é de:

$68 - 68,21 = 0,21\ mm$
$68 - 68,102 = 0,102\ mm$
$68 - 68,02 = 0,02\ mm$
$68 - 68,012 = 0,012\ mm$
$68 - 68,001 = 0,001\ mm$

Logo, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmentro de 68,001 mm, pois ele tem o diâmetro mais próximo do que ele precisa.

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 147)

A insulina é utilizada no tratamento de pacientes com diabetes para o controle glicêmico. Para facilitar sua aplicação, foi desenvolvida uma "caneta"na qual pode ser inserido um refil contendo 3 mL de insulina, como mostra a imagem.

Para controle das aplicações, definiu-se a unidade de insulina como 0,01 mL. Antes de cada aplicação, é necessário descartar 2 unidades de insulina, de forma a retirar possíveis bolhas de ar.

A um paciente foram prescritas duas aplicações diárias: 10 unidades de insulina pela manhã e 10 à noite.

Qual o número máximo de aplicações por refil que o paciente poderá utilizar com a dosagem prescrita?

a) 25. b) 15. c) 13.

d) 12. e) 8.

Resolução: Em cada aplicação, serão utilizadas 12 unidades de insulina- 10 como dose preescrita, mais 2 doses para retirar as bolas de ar. Desta forma, para cada aplicação, é necessário 0,12 mL de insulina.

Assim, com um refil de 3 mL, são possíveis:

$$\frac{3mL}{0,12mL} = 25 \text{ aplicações}$$

Alternativa: A

(ENEM 2015 - Q. 169 - Comparação de números decimais)

Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm.

Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de

a) 2,099. b) 2,96. c) 3,021.

d) 3,07. e) 3,10.

Resolução: As diferenças, em milímetros, das espessuras das lentes em estoque com a medida em 3 milímetros, são:

$$3,10 - 3 = 0,100$$
$$3,021 - 3 = 0,021$$
$$2,96 - 3 = -0,400$$
$$2,099 - 3 = -0,901$$
$$3,07 - 3 = 0,070$$

Logo, a lente com espessura mais próxima de 3 milímetros é a lente com 3,021 milímetros de espessuras.

Alternativa: C

(ENEM 2015 - Q. 177)

No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

a) 9. b) 7. c) 5.

d) 4. e) 3.

<u>Resolução</u>: Com base na imagem apresentada, a fração da carta da mesa é de:

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Analisando os valores das cartas da mão do jogador, vemos que há 3 cartas que são equivalentes aos valores da carta da mesa: 75%, 0,75 e $\frac{3}{4}$.

Logo, o jogador pode formar três pares com as cartas.

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 142)

De forma geral, os pneus radiais trazem em sua lateral uma marcação do tipo *abc/deRfg*, como *185/65R15*. Essa marcação identifica as medidas do pneu da seguinte forma:

• *abc* é a medida da largura do pneu, em milímetro;

• *de* é igual ao produto de 100 pela razão entre a medida da altura (em milímetro) e a medida da largura do pneu (em milímetro);

• *R* significa radical;

• *fg* é a medida do diâmetro interno do pneu, em polegada.

A figura ilustra as variáveis relacionadas com esses dados.

O proprietário de um veículo precisa trocar os pneus de seu carro e, ao chegar a uma loja, é informado por um vendedor que há somente pneus com os seguintes códigos: 175/65R15, 175/75R15, 175/80R15, 185/60R15 e 205/55R15. Analisando, juntamente com o vendedor, as opções de pneus disponíveis, concluem que o pneu mais adequado para seu veículo é o que tem a menor altura.

Desta forma, o proprietário do veículo deverá comprar o pneu com a marcação:

a) $205/55R15$. b) $175/65R15$. c) $175/75R15$.

d) $175/80R15$. e) $185/60R15$.

Resolução: Sejam l a largura e h a altura, ambas em milímetros. Então o número de é dado por:

$$de = 100.\frac{h}{l} \Rightarrow$$

$$h = \frac{l.de}{100}$$

Como abc é a medida da largura l, segue que:

$$h = \frac{abc.de}{100}.$$

Lembrando que a marcação é dada por *abc/deRfg*, vamos determinar, em milímetros, a altura de cada pneu que a loja possui:

$\bullet 175/65R15 : h_1 = \dfrac{abc.de}{100} = \dfrac{175.65}{100} = 113,75;$

$\bullet 175/75R15 : h_1 = \dfrac{abc.de}{100} = \dfrac{175.75}{100} = 131,25;$

$\bullet 175/80R15 : h_1 = \dfrac{abc.de}{100} = \dfrac{175.80}{100} = 140,00;$

$\bullet 175/60R15 : h_1 = \dfrac{abc.de}{100} = \dfrac{185.60}{100} = 111,00;$

$\bullet 205/55R15 : h_1 = \dfrac{abc.de}{100} = \dfrac{205.55}{100} = 112,75;$

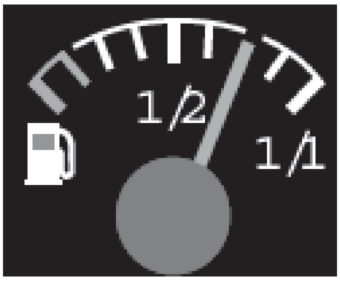
Como o pneu mais adequado para o veículo é o que tem a menor altura, o proprietário deverá comprar o pneu com a marcação *185/60R15*.

Podemos observar que a altura será menor para o menor produto entre abc e de. Então poderíamos não ter efetuado os cálculos para os pneus de marcação *175/65R15*, *175/75R15* e *175/80R15* pois, dentre esses, naturalmente o menor produto citado acima é o do pneu de marcação *175/65R15*, bastando, então, calcular a altura apenas deste, e não dos três. Naturalmente, deveríamos calcular a altura dos pneus de marcação *185/60R15* e *205/55R15*.

Alternativa: E

(ENEM 2016- Q. 169)

No tanque de um certo carro de passeio cabem até 50 L de combustível, e o rendimento médio deste carro na estrada é de 15 km/L de combustível. Ao sair para uma viagem de 600 km o motorista observou que o marcador de combustível estava exatamente sobre uma das marcas da escala divisória do medidor, conforme figura a seguir.



Como o motorista conhece o percurso, sabe que existem, até a chegada a seu destino, cinco postos de abastecimento de combustível, localizados a 150 km, 187 km, 450 km, 500 km e 570 km do ponto de partida.

Qual a máxima distância, em quilômetro, que poderá percorrer até ser necessário reabastecer o veículo, de modo a não ficar sem combustível na estrada?

a) 570. b) 500. c) 450.

d) 187. e) 150.

Resoluçao: De acordo com o enunciado, o tanque cheio comporta *50 L* de combustível. Pela figura, vemos que o marcador de combustível foi dividido em 8 partes e, ao sair para a viagem, este indicava $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ do tanque cheio. Assim, o tanque possuía:

O marcador de combustível indica $\frac{3}{4}$ do tanque cheio. Assim:

$$\frac{3}{4}.50L = 37,5\mathrm{l}$$

Como o rendimento do carro é de 15 km/l, temos:

1 L — 15 km
37,5 l — x km

$$\Rightarrow x = 15.37,5km \Rightarrow x = 562,5 \text{ km}$$

Logo, a distância máxima que o motorista poderia percorrer até ter que abastecer o veículo é de 562,5 km. No entanto, de acordo com as distâncias dos pontos de combustíveis do ponto de partida, ele deverá abastecer após percorrer 500 km, pois o posto estará a 70 km deste, e ele terá combustível para apenas mais 62,5 km.

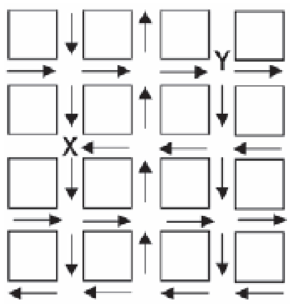
Alternativa: B

1.4 Grandezas e Medidas

1.4.1 Comprimento/Tempo

(ENEM 2009- Q. 136- Km/h)

O mapa ao lado representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.

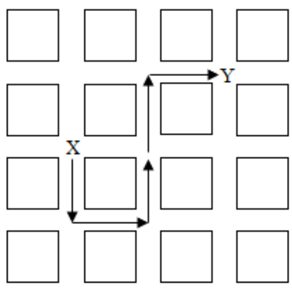


Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?

a) 25 min. b) 15 min. c) 2,5 min.

d) 1,5 min. e) 0,15 min.

<u>Resolução</u>:Considerando que o ônibus vá realizar o menor percurso possível, este seria o indicado na figura abaixo.



Logo, o ônibus percorrerá 5 quadras de 200 metros cada uma, o que corresponde a uma distância total de $5 \times 200 = 1000m = 1km$.

Como a velocidade do ônibus é constante e igual a *40km/h*, o tempo t, em minutos, gasto no percurso será:

$$40 — 1\ h = 60\ min$$
$$1\ km — t$$
$$t = \frac{1 \times 60}{40} = 1,5min$$

Alternativa: D

(ENEM 2009- Q. 175 - Segundo)

Joana frequenta uma academia de ginástica onde faz exercícios de musculação. O programa de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos em cada série. No aquecimento, ela caminha durante 10 minutos na esteira e descansa durante 60 segundos para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. Entre uma série e outra, assim como ao mudar de aparelho, Joana descansa por 60 segundos.

Suponha que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus exercícios às 10h30min e finalizado às 11h7min. Nesse dia e nesse tempo, Joana:

a) não poderia fazer sequer a metade dos exercícios e dispor dos períodos de descanso especificados em seu programa.

b) poderia ter feito todos os exercícios e cumprido rigorosamente os períodos de descanso especificados em seu programa.

c) poderia ter feito todos os exercícios, mas teria de ter deixado de cumprir um dos períodos de descanso especificados em seu programa.

d) conseguiria fazer todos os exercícios e cumpriria todos os períodos de descanso especificados em seu programa, e ainda se permitiria uma pausa de 7 min.

e) não poderia fazer todas as 3 séries dos exercícios especificados em seu programa; em alguma dessas séries deveria ter feito uma série a menos e não deveria ter cumprido um dos períodos de descanso.

Resolução: Para cumprir rigorosamente o programa, Joana gastará:

•10 minutos na caminhada de aquecimento;

•01 minuto para descanso após a caminhada;

•09 minutos durante as séries, pois são 18 séries de 30 segundos cada: $18 \times 30seg = 18 \times 0,5min =$ 9minutos;

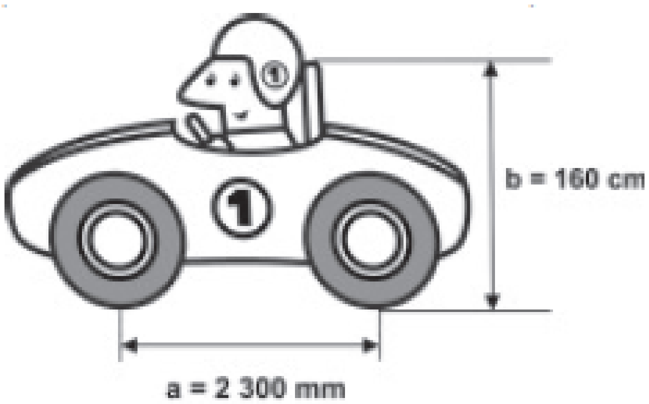
•17 minutos de descanso entre as séries e as trocas de aparelho.

Ou seja, Joana gastará um total de 37 minutos. Supondo que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus exercícios às 10h30min e finalizado às 11h7min, ela terá gasto, nesse dia, 37 minutos para cumprir o programa. Logo, o tempo gasto por Joana é igual ao tempo necessário para fazer todos os exercícios e cumprir rigorosamente os períodos de descanso.

Alternativa: B

(ENEM 2011- Q. 136- Metro)

Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:
a) distância a entre os eixos dianteiro e traseiro;
b) altura b entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas a e b em metros, obtêm-se, respectivamente,

a) 0,23 e 0,16.
b) 2,3 e 1,6.
c) 23 e 16.
d) 230 e 160.
e) 2300 e 1600.

Resolução: Para resolvermos o problema, precisamos fazer conversão de unidades. Sabemos que:

$$1m = 100cm = 100dm = 1000mm$$
$$1m = 100cm$$

Assim, 2300 mm = 230 cm = 23 dm = 2,3 m , e 160 mm =16 cm = 1,6 m.

Alternativa: B

(ENEM 2011- Q. 141- Metro e pés)

Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos.

Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 21 abr. 2010 (adaptado).

Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés.

Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

a) 3 390 pés.
b) 9 390 pés.
c) 11 200 pés.
d) 19 800 pés.
e) 50 800 pés.

Resolução: Considerando que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés, temos:

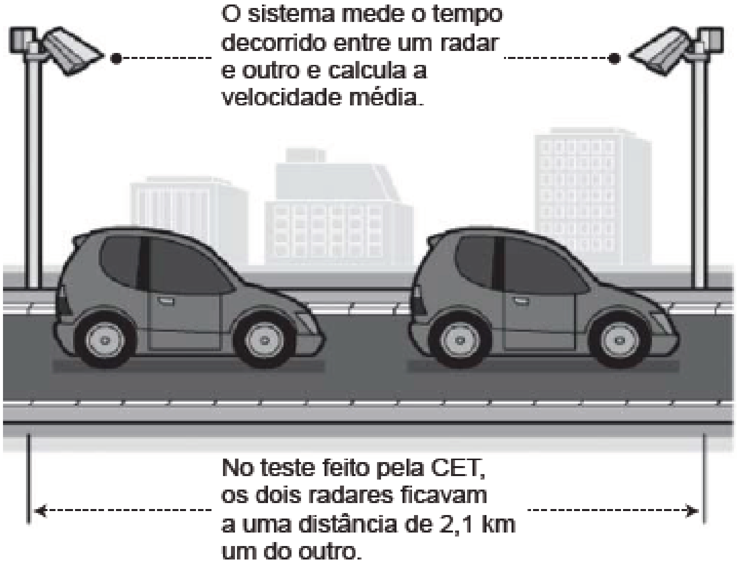
$$6000 \text{ metros} \cong 6000.(3,3pés) = 19800 \text{ pés}.$$

Em pés, a diferença entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu é: $31000 - 19800 = 11200$.

Alternativa: C

(ENEM 2014- Q. 153- Km/h)

A Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) de São Paulo testou em 2013 novos radares que permitem o cálculo da velocidade média desenvolvida por um veículo em um trecho da via.



As medições de velocidade deixariam de ocorrer de maneira instantânea, ao se passar pelo radar, e seriam feitas a partir da velocidade média no trecho, considerando o tempo gasto no percurso entre um radar e outro. Sabe-se que a velocidade média é calculada como sendo a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

O teste realizado mostrou que o tempo que permite uma condução segura de deslocamento no percurso entre os dois radares deveria ser de, no mínimo, 1 minuto e 24 segundos. Com isso, a CET precisa instalar uma placa antes do primeiro radar informando a velocidade média máxima permitida nesse trecho da via. O valor a ser exibido na placa deve ser o maior possível, entre os que atendem às condições de condução segura observadas.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 11 jan. 2014 (adaptado).

A placa de sinalização que informa a velocidade que atende a essas condições é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: De acordo com o enunciado, o deslocamento total é de 2,1 km = 2100 m, em um tempo de 1 minuto e 24 segundos, ou seja, 84 segundos. Portanto, a velocidade média é de:

$$\frac{2100m}{84s} = 25 \text{ m/s}$$

Sabemos que 1 m/s = 3,6 km/h. Logo, a velocidade máxima permitida é de:

$$25 \times (3,6km/h) = 90 \text{ km/h}$$

Alternativa: C

(ENEM 2016- Q. 177- Metro)

A London Eye é uma enorme roda-gigante na capital inglesa. Por ser um dos monumentos construídos para celebrar a entrada do terceiro milênio, ela também é conhecida como Roda do Milênio. Um turista brasileiro, em visita à Inglaterra, perguntou a um londrino o diâmetro (destacado na imagem) da Roda do Milênio e ele respondeu que ele tem 443 pés.

Disponível em: www.mapadelondres.org. Acesso em: 14 maio 2015 (adaptado).

Não habituado com a unidade pé, e querendo satisfazer sua curiosidade, esse turista consultou um manual de unidades de medidas e constatou que 1 pé equivale a 12 polegadas, e que 1 polegada equivale a 2,54 cm. Após alguns cálculos de conversão, o turista ficou surpreendido com o resultado obtido em metros.

Qual a medida que mais se aproxima do diâmetro da Roda do Milênio, em metro?

a) 53.
b) 94.
c) 113.
d) 135.
e) 145.

Resolução: Dos dados apresentados no enunciado, temos:

1 pé = 12 polegadas
1 polegada = 2,54 cm

Assim,

$$1 pé = 12 \times (2,54cm) = 30,48cm = 0,3048m.$$

Então, o diâmetro (D) da roda-gigante é dado por:

$$D = 443 \times (0,3048m) \cong 135m.$$

Alternativa: D

1.4.2 Massa

(ENEM 2015- Q.153- Tonelada/KG)

As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012.

Disponível em: www.noticiasagricolas.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

A quantidade, em quilogramas, de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

a) $4,129.10^3$ b) $4,129.10^6$ c) $4,129.10^9$

d) $4,129.10^{12}$ e) $4,129.10^{15}$

Resolução: Sabe-se que 1 tonelada $=1000kg = 10^3 kg$ e milhões é representado por 10^6. Assim, passando 4,129 milhões de toneladas para kg, temos:

$$4,129 \times 10^6 \times 10^3 kg = 4,129 \times 10^9 kg$$

Alternativa: C

1.4.3 Memória digital

(ENEM 2009- Q. 173- Byte)

A resolução das câmeras digitais modernas é dada em *megapixels*, unidade de medida que representa um milhão de pontos. As informações sobre cada um desses pontos são armazenadas, em geral, em *3 bytes*. Porém, para evitar que as imagens ocupem muito espaço, elas são submetidas a algoritmos de compressão, que reduzem em até 95% a quantidade de *bytes* necessários para armazená-las. Considere 1 KB = 1.000 *bytes*, 1 MB = 1.000 KB, 1 GB = 1.000 MB.

Utilizando uma câmera de 2.0 *megapixels* cujo algoritmo de compressão é de 95%, João fotografou 150 imagens para seu trabalho escolar. Se ele deseja armazená-las de modo que o espaço restante no dispositivo seja o menor espaço possível, ele deve utilizar:

a) um CD de 700 MB.

b) um *pendrive* de 1 GB.

c) um HD externo de 16 GB.

d) um *memory stick* de 16 MB.

e) um cartão de memória de 64 MB.

Resolução:De acordo com o enunciado, cada foto tem 2.0 megapixels, ou seja, dois milhões de pontos. Se as informações de cada ponto são armazenadas em 3 bytes, as informações de cada foto serão armazenadas em 2 milhões . 3 bytes = 6 milhões de bytes = 6 MB . Como o algoritmo de compressão é de 95%, apenas 100% - 95% = 5% será utilizado, ou seja, 0,05 . 6 MB = 0,3 MB/foto. Logo, 0,3 MB . 150 = 45 MB para todas as 150 fotos.

Portanto, o dispositivo que comporta esta capacidade e possui o menor espaço restante possível é o cartão de memória de 64 MB.

Alternativa: E

1.4.4 **Superficie/Área**

(ENEM 2014- Q. 178- Hectare/Metro quadrado)

A maior piscina do mundo, registrada no livro Guiness, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8

b) 80

c) 800

d) 8 000

e) 80 000

Resolução: Temos que 1 hectare = $1km^2 = 10^4 m^2$, assim a área da piscina é: $8hectares = 8.10^4 m^2 = 80000m^2$.

Alternativa: E

(ENEM 2016- Q. 179- Densidade - pessoas por m^2)

Para garantir a segurança de um grande evento público que terá início às 4 h da tarde, um organizador precisa monitorar a quantidade de pessoas presentes em cada instante. Para cada 2 000 pessoas se faz necessária a presença de um policial. Além disso, estima-se uma densidade de quatro pessoas por metro quadrado de área de terreno ocupado. Às 10 h da manhã, o organizador verifica que a área do terreno ja ocupado equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Porém, nas horas seguintes, espera-se que o público aumente a uma taxa de 120 000 pessoas por hora até o início do evento, quando não será mais permitida a entrada de público.

Quantos policiais serão necessários no início do evento para garantir a segurança?

a) 360

b) 485

c) 560

d) 740

e) 860

Resolução: Seja n_h a quantidade de pessoas no evento às h horas. Às 10 h da manhã, o organizador verificou que a área do terreno já ocupado equivale a um quadrado com lados medindo 500 m. Como estima-se uma densidade de 4 pessoas por metro quadrado, segue que o número de pessoas às 10 horas é dado por:

$$n_{10} = 4.(500)^2 = 4.250000 = 1000000$$

Como a taxa de aumento é de 120000 pessoas por hora, e até as 16 horas terão se passado 6 horas, às 16 horas, o número de pessoas será:

$$n_{16} = 1000000 + 6.1200000 = 1720000$$

Como é necessária a presença de um policial para 2000 pessoas, para a segurança de todas as pessoas, serão necessários:

$$\frac{1720000}{2000} = 860 \text{ policias.}$$

Alternativa: E

1.4.5 **Volume**

(ENEM 2009- Q. 153- Litro/ m^3)

Técnicos concluem mapeamento do aquífero Guarani

O aquífero Guarani localiza-se no subterrâneo dos territórios da Argentina, Brasil, Paraguai e Uruguai, com extensão total de 1.200.000 quilômetros quadrados, dos quais 840.000 quilômetros quadrados estão no Brasil. O aquífero armazena cerca de 30 mil quilômetros cúbicos de água e é considerado um dos maiores do mundo.

Na maioria das vezes em que são feitas referências à água, são usadas as unidades metro cúbico e litro, e não as unidades já descritas. A Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (SABESP) divulgou, por exemplo, um novo reservatório cuja capacidade de armazenagem é de 20 milhões de litros.

Disponível em: http://noticias.terra.com.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

Comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório da SABESP, a capacidade do aquífero Guarani é:

a) $1,5 \times 10^2$ vezes a capacidade do reservatório novo.

b) $1,5 \times 10^3$ vezes a capacidade do reservatório novo.

c) $1,5 \times 10^6$ vezes a capacidade do reservatório novo.

d) $1,5 \times 10^8$vezes a capacidade do reservatório novo.

e) $1,5 \times 10^9$ vezes a capacidade do reservatório novo.

Resolução: Com base nos dados apresentados, o aquífero Guarani armazena:

$$30\,000 km^3 = 30 \times 10^3 \times 10^9 m^3 = 30 \times 10^{12} \times 10^3 \text{ litros} = 30 \times 10^{15} \text{ litros.}$$

A capacidade do novo reservatório da SABESP é de 20 milhões de litros, ou seja, 20.10^6 litros.

Logo, comparando as capacidades do aquífero Guarani e desse novo reservatório, a capacidade do aquífero Guarani é:

$$\frac{30 \times 10^{15}}{20 \times 10^6} = 1,5 \times 10^9 \text{ vezes a capacidade do reservatório.}$$

Alternativa: E

(ENEM 2010 - Q. 158 - Densidade)

No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem(1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore. O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em m^3 a partir da medida do rodo e da altura da árvore.

O volume da tora em m^3 é dado por

V = rodo^2 × altura × 0,06

O rodo e a altura da árvore devem ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo:

•3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m^3;

•2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m^3.

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente,

a) 29,9 toneladas. b) 31,1 toneladas. c) 32,4 toneladas.

d) 35,3 toneladas. e) 41,8 toneladas.

Resolução: De acordo com o enuciado, o volume de cada tora da espécie I, em metros cúbicos, é igual a:

$$3^2 \times 12 \times 0,06 = 6,48$$

Já o volume de cada tora da espécie II, em metros cúbicos, é igual a:

$$4^2 \times 10 \times 0,06 = 9,60$$

Logo, a massa, em toneladas, das cinco toras é igual a:

$$3 \times 6,48 \times 0.77 + 2 \times 9,6 \times 0,78 = 29,9448.$$

Alternativa: A

(ENEM 2011- Q. 145- Litro)

Café no Brasil

O consumo atingiu o maior nível da história no ano passado: os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras.

Veja. Ed. 2158, 31 mar. 2010.

Considere que a xícara citada na notícia seja equivalente a, aproximadamente, 120 mL de café. Suponha que em 2010 os brasileiros bebam ainda mais café, aumentando o consumo em $\frac{1}{5}$ do que foi consumido no ano anterior.

De acordo com essas informações, qual a previsão seria mais aproximada para o consumo de café em 2010?

a) 8 bilhões de litros.
b) 16 bilhões de litros.
c) 32 bilhões de litros.
d) 40 bilhões de litros.
e) 48 bilhões de litros.

Resolução: De acordo com o enunciado, os brasileiros beberam o equivalente a 331 bilhões de xícaras, sendo que cada xícara equivale a 120 mL de café. Então, eles consumiram, em bilhões:

$$331 \times 120 mL = 39\,720 mL$$

Supondo que, em 2010, os brasileiros aumentem o consumo de café em $\frac{1}{5}$, eles passaram a consumirão, em bilhões:

$$\frac{1}{5} \times (39\,720) + 39\,720 = 47\,664 mL = 47,664 L$$

Logo, a previsão mais aproximada para o consumo de café em 2010 é de 48 milhões de litros.

Alternativa:

(ENEM 2013- Q. 143- Vazão)

Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para $900m^3$. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de $500m^3$, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

a) 2.
b) 4.
c) 5.
d) 8.
e) 9.

Resolução: De acordo com o enunciado, o escoamento da água é feito por 6 ralos. Portanto, cada ralo elimina:

$$\frac{900m^3}{6} = 150m^3 \text{ de água em 6 horas.}$$

O que significa que cada ralo elimina $\frac{150m^3}{6} = 25m^3$ de água por hora.

Os ralos do novo reservatório são idênticos aos do primeiro e, portanto eliminam $25m^3$ por hora, o que equivale a $100m^3$ em 4 horas.

Se o novo reservatório tem 500 m^3 de capacidade, então o número de ralos deverá ser: $\frac{500}{100} = 5$.

Alternativa: C

(ENEM 2013- Q. 163- Litro/Onça fluida)

Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de:

a) 0,83.
b) 1,20.
c) 12,03.
d) 104,73.
e) 120,34.

Resolução: Com base nas informações apresentadas, temos que $1floz \cong 2,95cL = 29,5mL$.

Logo, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluída (fl oz), é:

$$\frac{355}{29,5} \cong 12,03$$

Alternativa: C

(ENEM 2015- Q. 172- Litro)

Alguns exames médicos requerem uma ingestão de água maior do que a habitual. Por recomendação médica, antes do horário do exame, uma paciente deveria ingerir 1 copo de água de 150 mililitros a cada meia hora, durante as 10 horas que antecederiam um exame. A paciente foi a um supermercado comprar água e verificou que havia garrafas dos seguintes tipos:

•Garrafa I: 0,15 litro
•Garrafa II: 0,30 litro
•Garrafa III: 0,75 litro
•Garrafa IV: 1,50 litro
•Garrafa V: 3,00 litros

A paciente decidiu comprar duas garrafas do mesmo tipo, procurando atender à recomendação médica e, ainda, de modo a consumir todo o líquido das duas garrafas antes do exame.

Qual o tipo de garrafa escolhida pela paciente?

a) I b) II c) III

d) IV e) V

Resolução: Como a paciente deve tomar 1 copo de água a cada meia hora durante 10 horas, o número de copos de água que ela deve tomar é de 2. 10 = 20 copos (1 copo a cada meia hora coresponde a 2 copos por hora),

Assim, o volume de água que a paciente vai tomar é 20. 150 mL = 3000 mL = 3 L e, portanto, ela escolheu a garrafa IV, pois $\frac{3}{2} = 1,5L$.

Alternativa: D

1.5 Matemática financeira

Porcentagem

(ENEM 2009- Q. 140)

Uma resolução do Conselho Nacional de Política Energética (CNPE) estabeleceu a obrigatoriedade de adição de biodísel ao óleo dísel comercializado nos postos. A exigência é que, a partir de 1.º de julho de 2009, 4% do volume da mistura final seja formada por biodísel. Até junho de 2009, esse percentual era de 3%. Essa medida estimula a demanda de biodísel, bem como possibilita a redução da importação de dísel de petróleo.

Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 12 jul. 2009 (adaptado).

Estimativas indicam que, com a adição de 4% de biodísel ao dísel, serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel no segundo semestre de 2009. Considerando-se essa estimativa, para o mesmo volume da mistura final dísel/biodísel consumida no segundo semestre de 2009, qual seria o consumo de biodísel com a adição de 3%?

a 27,75 milhões de litros.

b 37,00 milhões de litros.

c 231,25 milhões de litros.

d 693,75 milhões de litros.

e 888,00 milhões de litros.

Resolução: Se com a adição de 4% de biodísel ao dísel serão consumidos 925 milhões de litros de biodísel, então o volume da mistura final dísel/biodísel é x tal que:

$$0,04.x = 925 \text{ milhões} \Rightarrow x = \frac{925}{0,04} \text{ milhões de litros.}$$

O consumo de biodísel com a adição de 3% é dado por:

$$3\% \text{ de } x = 0,03.\frac{925}{0,04} = \frac{27,75}{0,04} = 693,75 \text{ milhões de litros.}$$

Alternativa: D

(ENEM 2009- Q. 177)

João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria:

a) renegociar suas dívidas com o banco.

b) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.

c) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

d) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

e) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

Resolução: Considerando os valores em reais, os prazos estipulados em meses e o empréstimos oferecido pelo amigo José, João tem as seguintes opções:

1) Pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos:

$$12 \times (150) + 5 \times (80) = 2200$$

2) Quitar apenas o cheque especial:

$$10 \times 150 \times 1,25 + 5 \times 80 \times 1,25 = 2175$$

3) Quitar ambas as dívidas do cartão de crédito:

$$12 \times 150 + 0,75 \times 5 \times 80 \times 1,25 = 2175$$

4) Quitar ambas as dívidas:

$$(10 \times 150 + 0,75 \times 5 \times 80) \times 1,25 = 2250$$

5) Renegociar a dívida com o banco:

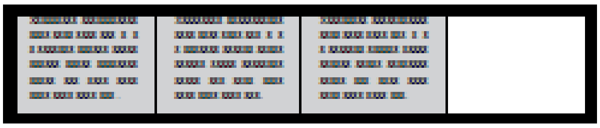
$$18 \times 125 = 2250$$

De todas, a melhor opção para João é pagar a dívida do cartão de crédito e continuar pagando normalmente a dívida do cheque especial.

Alternativa: E

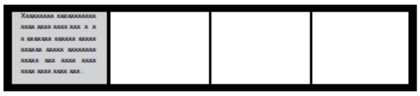
(ENEM 2010- Q. 136)

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

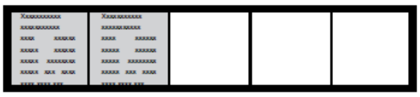


Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

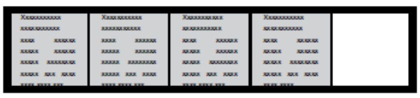
Uma representação possível para essa segunda situação é:

a) 

b) 

c) 

d) 

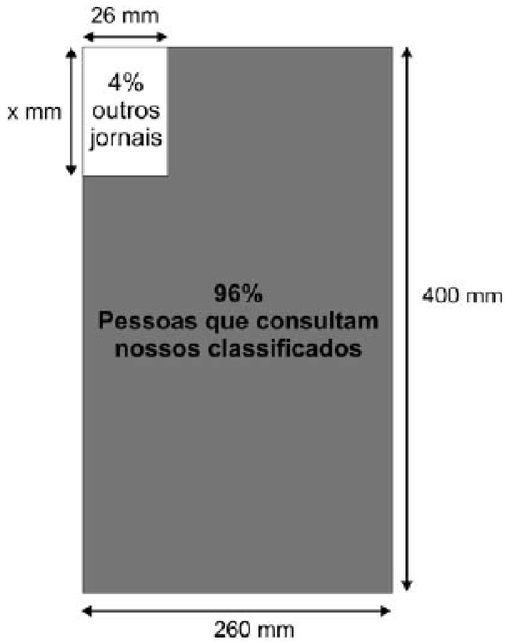
e) 

Resolução: Considerando que $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$, a melhor representação possível para a segunda situação é a da alternativa C.

Alternativa: C

(ENEM 2010- Q. 153)

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação do seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente:

a) 1 mm.
b) 10 mm.
c) 17 mm.
d) 160 mm.
e) 167 mm.

Resolução: A área do retângulo que representa os 4% é dada por x. 26, logo:

$$x.26 = 4\% \text{ da área total}$$

Ou seja:

$$26x = 0,04.(260).(400) \Rightarrow 26x = 4160 \Rightarrow x = \frac{4160}{26} \Rightarrow x = 160$$

Logo, a medida do lado do retângulo que representa os 4% deve ser de aproximadamente 160 mm.

Alternativa: D

(ENEM 2010- Q. 154)

Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: **insuficiente**, quando o crescimento é menor que 1%, **regular**, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%, **bom**, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; **ótimo**, quando é maior ou igual a 10% e menor que 20%; e **excelente**, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R$132 000,000 em 2008 e de R$ 145 000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado:

a) insuficiente
b) regular.
c) bom.
d) ótimo.
e) excelente.

Resolução: De acordo com o enunciado, a empresa apresentou lucro de R$ 132000,00 em 2008 e de R$ 145000,00 em 2009. Logo, o crescimento anual da empresa foi de:

$$R\$145\,000 - R\$132\,000 = R\$13\,000$$

Como a classificação financeira atual é feita tendo como base o desempenho financeiro do ano anterior, segue que o crescimento corresponde a aproximadamente:

$$\begin{gathered} 132000 - 100\% \\ 13000 - x \end{gathered}$$

$$132\,000x = 1\,300\,000 \Rightarrow x = \frac{1\,300\,000}{132\,000} = 9,84\%$$

Portanto, a empresa apresentou um conceito BOM.

Alternativa: C

(ENEM 2010- Q. 170)

Em 2006, a produção mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43% da produção mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América, usando milho, foi de 45%.

Disponível em: planetasustentavel.abril.com.br. Acesso em: 02 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006, para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,

a) 22,5%.
b) 50,0%.
c) 52,3%.
d) 65,5%.
e) 77,5%.

Resolução: Considerando que, em 2009,a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006(40 bilhões), que a produção conjunta do Brasil e dos Estados Unidos também seja a mesma de 2006(88%) e que a produção dos Estados Unidos em 2009 será a metade da de 2006 ($\frac{45\%}{2} = 22,5\%$), a produção do Brasil deve ser, aproximadamente:

$$0,43 - 100\%$$
$$0,65 - x$$

$$x = \frac{0,65.100}{0,43} \cong 1,523$$

O que representa um aumento de (1,523 - 1) = 52,3 %.

Alternativa: C

(ENEM 2010- Q. 172)

Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16%. b) 24%. c) 32%.

d) 48%. e) 64%.

Resolução: Do grupo de pacientes, 60% não foram completamente curados pelo tratamento tradicional.

Em relação à metade desses, no primeiro tratamento inovador, 35% foram curados, ou seja:

$$\frac{1}{2}.35\%.60\% = \frac{1}{2}.21\% = 10,5\%.$$

No segundo tratamento inovador, 45% foram curados, ou seja,

$$\frac{1}{2}.45\%.60\% = \frac{1}{2}.27\% = 13,5\%$$

Em relação ao total de pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de $10,5\% + 13,5\% = 24\%$.

Alternativa: B

	Rendimento mensal (%)	IR (imposto de renda)
POUPANÇA	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

(ENEM 2011- Q. 157)

Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB(certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

a) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b) a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e) o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

Resolução: Com base nos dados apresentados, o montante, em reais, em cada aplicação é dado por:

•Poupança: $0,56\%$ de $500 = 0,0056.500 = 2,80 \Rightarrow 500 + 2,80 = 502,80$.

• CDB:

0,875% de 500 = 0,00876. 500 = 4,38 (ganho) IR sobre o ganho: 4% de 4,38 = 0,04. 4,38 = 0,1752 Montante: 500,00 + 4,38 - 0,1752 = 504,21

Logo, a aplicação mais vantajosa é o CDB, pois totalizará um montante maior, de $R\$504,21$.

Alternativa:D

(ENEM 2011- Q. 162)

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e ,no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

a) R$ 4 222,22. b) R$ 4 523,80. c) R$ 5 000,00.

d) R$ 13 300,00. e) R$ 17 100,00.

Resolução: Seja C a quantia inicial que essa pessoa aplicou, ou seja, o capital. Então:

1) Após o primeiro mês, perdeu $0,3c(30\%)$ e ficou com $0,7c(70\%)$.

2) Após o segundo mês, recuperou 20 % da quantia perdida, ou seja, $0,2.0,3c = 0,06c$, ficando com $0,7c + 0,06c = 0,76c$.

3)$0,76c = 3800 \Leftrightarrow c = 5000$.

Portanto, a quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de 5000 reais.

Alternativa: C

(ENEM 2011- Q. 171)

Nos últimos cinco anos, 32 mil mulheres de 20 a 24 anos foram internadas nos hospitais do SUS por causa de AVC. Entre os homens da mesma faixa etária, houve 28 mil internações pelo mesmo motivo.

Época. 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que, nos próximos cinco anos, haja um acréscimo de 8 mil internações de mulheres e que o acréscimo de internações de homens por AVC ocorra na mesma proporção.

De acordo com as informações dadas, o número de homens que seriam internados por AVC, nos próximos cinco anos, corresponderia:

a) 4 mil. b) 9 mil. c) 21 mil.

d) 35 mil. e) 39 mil.

Resolução: Com base nos dados apresentados, o acréscimo de 8 mil internações de mulheres corresponde a 25% de 32 mil, pois $\frac{8}{32} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$.

Como o acréscimo de internações de homens por AVC ocorre na mesma proporção do de mulheres, tem-se que o número de acréscimos de internações de homens por AVC é 25% de 28 mil, ou seja:

$$\frac{25}{100}.28000 = 7000\ .$$

Assim sendo, o número de homens internados por AVC nos próximos cinco anos será 35 mil (28 mil + 7 mil).

Alternativa: D

(ENEM 2011- Q. 178)

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Resolução: De acordo com o enunciado, ao final de um ano:
•O investimento A renderá: $(1,03)^{12}–1 = 1,426–1 = 0,426 = 42,6\%$;
•O investimento B renderá 36%;
•O investimento C renderá: $(1,18)^2–1 = 1,3924–1 = 0,3924 = 39,24\%$.
Portanto, para escolher o investimento com maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual (42,6%) e maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C, respectivamente iguais a 36% e 39,24%.

Alternativa: C

(ENEM 2012- Q. 150)

Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:
• Opção 1: Pagar à vista, por R$ 55 000,00;
• Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 30 000,00, e mais uma prestação de R$ 26 000,00 para dali a 6 meses.
• Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de R$ 20 000,00, mais uma prestação de R$ 20 000,00, para dali a 6 meses e outra de R$ 18 000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
• Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de R$ 15 000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando R$ 39 000,00.
• Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de R$ 60 000,00.
Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.
Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Resolução: Com base nos dados apresentados, se ele optar por:
•Opção 1: Arthur desembolsa R$ 55 000,00 de imediato.
•Opção 2: Arthur desembolsa R$ 30 000,00.
De acordo com o enunciado, ele aplica o restante do dinheiro com rentabilidade de 10% ao semestre.
Nesse caso, Arthur aplica R$ 25 000,00, que após 6 meses, rende um montante de:

$$M = 25000.(1 + 0,10) = 25000.1,10 = 27500\text{reais}.$$

Pagando uma prestação de R$ 26 000,00, restará: R$ (27 500 - 26 000) = 1500,00. Esse valor, aplicado por mais 6 meses, resulta em um montante de:

$$M = 15000(1 + 0,10) = 1650 \text{ reais}.$$

•Opção 3: Arthur desembolsa R$ 20 000,00. Aplica R$ 35 000,00, que, após 6 meses, rende um montante de:

$M = R\$35000,00(1 + 0,10) = R\$38500,00.$

Pagando uma prestação de R$ 20 000,00, restará: (38 500 - 20 000) = R$ 18 500,00.

Esse valor, aplicado por mais 6 meses, resulta em um montante de:

$M = 1,10.R\$18500,00 = R\$20350,00.$

Pagando a parcela de 18 000,00, sobrará 2 350,00.

• Opção 4: Arthur desembolsa R$ 15 000,00. Aplica R$ 40 000,00, que, após seis meses, renderá um montante de:

$$M = 40000,00(1 + 0,10) = 44000,00 \text{ reais}.$$

Logo, após mais seis meses, ou seja, um ano, a aplicação renderá um montante de:

$$M = 44000,00(1 + 0,10) = 48400,00 \text{ reais}.$$

Pagando uma parcela de $R\$39000,00$, Arthur restará com $(R\$48400–R\$3900) = R\$9400$.

• Opção 5: Se Arthur nada pagar no ato da compra, aplicará os R$ 55 000,00, que, após seis meses, resultará em um montante de:

$$M = 55500(1 + 0,10) = 60500 \text{ reais}.$$

E após um ano, esse valor irá gerar um montante de:

$$M = 60500(1 + 0,10) = 66550 \text{ reais}.$$

Pagando uma parcela de R$ 60 000,00, Arthur restará com R$ 6 550,00.

Para ele, a melhor opção é a 4, pois lhe permitirá, no final de um ano, ficar com a maior quantidade de dinheiro. Observe que, nesta opção 4, o valor pago por Arthur ($R15000,00 + R\$39000,00 = R$ 54 000,00) é menor que o valor pago à vista (RS 55 000,00).

Alternativa: D

(ENEM 2012- Q. 171)

Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%.

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de:

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

a) hipoglicemia. b) normal. c) pré-diabetes.
d) diabetes melito. e) hiperglicemia.

Resolução: Com base nos dados apresentados, na primeira etapa do tratamento ele conseguiu reduzir a taxa em 30%, logo a taxa de glicose desse paciente será de:

$$300.(70\%) = 300.(0,7) = 210.$$

Como na segunda etapa ele reduziu sua glicose em 10 %, temos que a glicose do paciente será de:

$$210.(90\%) = 210.(0,9) = 189.$$

Como a taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL, tal paciente estava na categoria de diabete melito.

Alternativa: D

(ENEM 2013- Q. 146)

O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

a) R$ 900,00. b) R$ 1 200,00. c) R$ 2 100,00.
d) R$ 3 900,00. e) R$ 5 100,00.

Resolução: O lucro desse contribuinte, em reais, foi de:

$$34000 - 26000 = 8000.$$

O Imposto de Renda que esse contribuinte terá que pagar, em reais, é:

$$15\%.(8000) = \frac{15}{100}.8000 = 1200.$$

Alternativa: B

(ENEM 2013- Q. 151)

Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

a) 15,00. b) 14,00. c) 10,00.
d) 5,00. e) 4,00.

Resolução: Com base nos dados apresentados, os clientes que não possuem o cartão fidelidade têm direito a 20% de desconto. Como o cliente não possui o cartão, ele irá pagar:

$$80\%.(50) = 0,8.(50) = 40 \text{ reais.}$$

Se o cliente tivesse o cartão, ele teria um desconto adicional de 10%. Portanto, ele pagaria:

$$90\%.(40) = 0,9.(40) = 36 \text{ reais.}$$

Logo, a economia adicional desse cliente seria de (40-36) = 4 reais.

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 174)

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

a) 4%. b) 20%. c) 36%.
d) 64%. e) 96%.

Resolução: Com base nas informações apresentadas, dizer que houve uma redução linear de 20% é o mesmo que dizer que as medidas da base e da altura do retângulo foram reduzida em 20%. Se o retângulo original tinha 30 cm de base, temos que sua nova medida será de:

$$0,2 \times (30) = 6$$
$$30 - 6 = 24 \text{ cm}.$$

Da mesma maneira, sua altura também foi reduzida em 20%. Portanto, temos:

$$0,2 \times (15) = 3$$
$$15 - 3 = 2 \text{ cm}.$$

Assim, o novo retângulo tem base medindo 24 cm e altura 12 cm.
Logo, as áreas dos retângulos são:

$$A_{inicial} = 30.(15) = 450\ cm^2$$
$$A_{final} = 24.(12) = 288\ cm^2$$

Podemos notar que a área foi reduzida em 450-288 = 162 m^2, o que implica em:

450 - 100%
162 - x

$$450x = 16200 \Rightarrow x = \frac{16200}{450} = 36\%.$$

Com isso, podemos concluir, que após o cozimento, a área da base foi reduzida em 36% .

Alternativa: C

(ENEM 2013 - Q. 177)

Um comerciante visita um centro de vendas para fazer cotação de preços dos produtos que deseja comprar. Verifica que se aproveita 100% da quantidade adquirida de produtos do tipo A, mas apenas 90% de produtos do tipo B. Esse comerciante deseja comprar uma quantidade de produtos, obtendo o menor custo/benefício em cada um deles. O quadro mostra o preço por quilograma, em reais, de cada produto comercializado.

Produto	Tipo A	Tipo B
Arroz	2,00	1,70
Feijão	4,50	4,10
Soja	3,80	3,50
Milho	6,00	5,30

Os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente,

a) A, A, A, A.
b) A, B, A, B.
c) A, B, B, A.
d) B, A, A, B.
e) B, B, B, B.

Resolução: Como sabemos que o comerciante obtém 90% de aproveitamento na compra do produto B, ao calcularmos 90% do preço de cada produto do tipo A, se esse valor for superior ao valor do tipo B, escolhe-se o tipo B,pois nesse caso o tipo B terá um menor custo/benefício, caso contrário, escolhe-se o tipo A.

Portanto, temos que:

90% de $2,00 = 0,9.(2,00) = 1,80 > 1,70$
90% de $4,50 = 0,9.(4,50) = 4,05 < 4,10$
90% de $3,80 = 0,9.(3,80) = 3,42 < 3,50$
90% de $6,00 = 0,9.(6,00) = 5,40 > 5,30$

Com base nos resultados, pode-se concluir que os tipos de arroz, feijão, soja e milho que devem ser escolhidos pelo comerciante são, respectivamente: B, A, A e B.

Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 138)

Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.
b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.
c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.
d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.
e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

Resolução: De acordo com o enunciado, o ponto de sustentação central receberá 60%, e o restante, 40%, será distribuído igualmente entre os outros dois pontos.

Assim, a carga recebida pelo três ponto de sustentação central é:

$$60\% \text{ de } 12t = 0,6.(12t) = 7,2t$$

Dentre as alternativas, a única possível é a C.

Podemos verificar que a carga dos outros dois pontos é $2,4t$:

$$(12-7,2)t = 4,8t \Rightarrow \frac{4,8}{2}t = 2,4t.$$

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 142)

A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de:

a) 1,14. b) 1,42. c) 1,52.

d) 1,70. e) 1,80.

Resolução: A partir dos dados fornecidos, a variação percentual relativa no período de 2000 a 2010 é dada por:

$$\frac{2,38-1,90}{2,38}=\frac{0,48}{2,38}\cong 0,20, \text{ ou seja, } 20\%.$$

Nesse caso, em 2010, a taxa de fecundidade(t) pode ser calculada através de:

$$\frac{1,90-t}{1,90}=0,2\Rightarrow$$

$$1,90-t=0,38\Rightarrow$$

$$t=1,52.$$

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 147)

Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas.

Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses. Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser:

a) 72%. b) 68%. c) 64%.

d) 54%. e) 18%.

Resolução: Com base nos dados apresentados, temos que, do volume(V) de esgoto, 36% é tratado. Logo, 64 % não é tratado, assim:

$$64\% \text{ de V} = 0,64.V = 8\Rightarrow$$

$$V=\frac{8}{0,64}=12,5 \text{ bilhões.}$$

Como a meta da empresa é reduzir a quantidade de esgoto não tratado lançado para 4 bilhões, então o volume de esgoto tratado deverá ser:

$$12,5 - 4,0 = 8,5 \text{ bi}$$

Logo, o percentual de esgoto tratado será de:

$$\frac{8,5}{12,5} = 0,68 = 68\%.$$

Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 159)

O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos. **Folha de S. Paulo**, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de:

a) 32,8%
b) 28,6%
c) 10,7%
d) 9,4%
e) 8,0%

Resolução: De acordo com o enunciado, temos que o percentual correspondente a área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é:

$$\frac{80}{853} milhões \cong 0,094 = 94\%.$$

Alternativa:D

(ENEM 2014 - Q. 169)

De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

•25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.

•33% são utilizados em descarga de banheiro.

•27% são para cozinhar e beber.

•15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água,

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

a) 30,0. b) 69,6. c) 100,4.

d) 130,4. e) 170,0.

Resolução: Com base nos dados apresentados, o consumo de água por pessoa, em média, é 200 litros por dia. Logo, essa pessoa gasta, por dia:

•$0,25.(200) = 50$ litros para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.
•$0,33.(200) = 66$ litros em descarga no banheiro.
•$0,27.(200) = 54$ litros para cozinhar e beber.
•$0,15.(200) = 30$ litros para demais atividades.

Com cada brasileiro adotando a economia do quadro, teríamos uma economia:
• tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes:

$$50 - (24 + 3,2 + 2,4) = 20,4$$

• descarga no banheiro:

$$66 - 18 = 48$$

• cozinhar e beber:

$$54 - 22 = 32$$

Mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, cada pessoa economizará, em média: $20,4 + 48 + 32 = 100,4$ litros de água por dia.

Alternativa: C

(ENEM 2014- Q. 180)

Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre 70% e 90%, dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é:

a) $[35;63]$ b) $[40;63]$ c) $[50;70]$

d) $[50;90]$ e) $[70;90]$

Resolução: Considerando L como sendo a intensidade da luz que sai da fonte externa, a quantidade mínima que passa do vidro é de 70% de 50% L = 35% L e quantidade máxima é dada por 90% de 70%L = 63% L.

Logo a porcentagem P da intensidade da luz que ultrapassa o vídro está num intervalo de 35% a 63%.

Alternativa: A

(ENEM 2015- Q. 152)

Um casal realiza um financiamento imobiliário de R$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxa de juros efetivas de 1% ao mês. A primeira prestação é paga um mês após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R$ 500,00 mais juro de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, a cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

a) 2 075,00. b) 2 093,00. c) 2 138,00.

d) 2 255,00. e) 2 300,00.

Resolução: Com base nos dados apresentados, como o valor de cada prestação é R$ 500,00, na décima prestação o saldo devedor será de:

$$180000 - 9.(500) = 175500$$

Como incide juro de 1% sobre o saldo devedor, temos que:

$$1\%.175500 = 1755$$

Assim, a décima prestação é, em reais, de :

$$500 + 1755 = 2255$$

Alternativa: D

(ENEM 2015- Q. 155)

Segundo dados apurados no Censo 2010, para uma população de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum tipo de rendimento em 2010, a renda média mensal apurada foi de R$ 1202,00. A soma dos rendimentos mensais dos 10% mais pobres correspondeu a apenas 1,1% do total de rendimentos dessa população considerada, enquanto que a soma dos rendimentos mensais dos 10% mais ricos correspondeu a 44,5% desse total.

Disponível em: www.estadao.com.br. Acesso em: 16 nov. 2011(adaptado).

Qual foi a diferença, em reais, entre a renda média mensal de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais ricos e de um brasileiro que estava na faixa dos 10% mais pobres?

a) 240,40 b) 548,11 c) 1 723,67

d) 4 026,70 e) 5 216,68

Resolução: De acordo com o enunciado, a receita gerada pela população(p) de 101,8 milhões de brasileiros com 10 anos ou mais de idade e que teve algum rendimento de 2010 foi R$ 1202,00.

A receita gerada pelos 10% mais pobres foi de (1,1% . R$ 1 202,00.p) e a renda média mensal de um brasileiro nesta faixa foi de:

$$\frac{1,1\%.(R\$1202,00.p)}{10\%.p} = \frac{0,011.(1202,00)}{0,10} = R\$132,22$$

Já receita gerada pelos 10% mais ricos foi de (44,5% . R$ 1 202,00 . p) e a renda média mensal de um brasileiro nesta faixa de renda foi de:

$$\frac{44,5\%.(R\$1202,00.p)}{10\%.p} = \frac{0,445.(1202,00)}{0,10} = R\$5348,90$$

A diferença, em reais, entre as rendas médias dos brasileiros que estavam nas duas faixas foi de:

$$5348,90 - 132,22 = R\$5216,68$$

Alternativa: E

(ENEM 2015- Q. 158)

O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virushpv.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado).

A proposta implementada foi a de número:

a) I b) II c) III

d) IV e) V

Resolução: Supondo que p seja a quantidade de meninas do público-alvo do município e x a porcentagem que deverá ser vacinada.

A quantidade de meninas que desenvolvam a doença deve ser de no máximo 5,9% da população, ou seja, 5,9%p.

Temos que o HPV acomete 50% das pessoas não vacinadas, precisamos considerar ainda os 2% nas pessoas de ineficácia da vacina, e a quantidade de pessoas que não vão tomar a vacina (1-x). Assim, temos a seguinte equação:

Sabemos que: 50% das pessoas que não foram vacinadas 2% das pessoas que tomaram a vacina, mas esta não funcionou (ineficaz) (1-x) pessoas que não tomaram a vacina.

Agora precisamos considerar os casos em que a pessoa não tomou a vacina e não desenvolveu a doença (apenas 50% vai desenvolver). De forma similar, a ineficácia da vacina não é garantia de desenvolvimento da doença.

Dessa maneira, podemos calcular:

$$50\%.2\%.x.p + 50\%.(1-x).p = 5,9\%p$$
$$0,5.0,2.x + 0,5(1–x) = 0,59$$
$$0,5.(0,2x + 1–x) = 0,59$$
$$1–0,98x = \frac{0,590}{0,5}$$
$$x = \frac{0,882}{0,98} = 0,9 = 90\%$$

Alternativa: A

(ENEM 2016- Q. 156)

Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento.

Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser:

a) R$ 0,96. b) R$ 1,00. c) R$ 1,40.

d) R$ 1,50. e) R$ 1,56.

Resolução: De acordo com o enunciado, temos que o custo das 4 caixas de picolés é de 4. (R$ 16,00) = R$ 64,00.

A pessoa quer ter um lucro superior a 20% do lucro obtido no dia anterior e, portanto, deverá ter um lucro de 120% de R$ 40,00 = 1,2. R$ 40,00 = R$ 48,00.

Como em 4 caixas existem 4. (20) = 80 picolés, cada picolé deverá ser vendido por:

$$\frac{64,00+48,00}{80} = R\$1,40$$

Portanto, o valor do picolé no segundo dia, deve ser de R$ 1,40.

Alternativa: C

(ENEM 2016- Q. 164)

O LIRAa, Levantamento Rápido do Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação.

O serviço de vigilância sanitária de um município, no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro.

O setor de detetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 28 out. 2015.

As ações de controle iniciarão pelo bairro:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Resolução: Com base nos dados apresentados, o LIRAa dos bairros são:

I. $\frac{14}{400} = \frac{3,5}{100} = 3,5\%$

II. $\frac{6}{500} = \frac{1,2}{100} = 1,2\%$

III. $\frac{13}{520} = \frac{1}{40} = 2,5\%$

IV. $\frac{9}{360} = \frac{1}{40} = 2,5\%$

V. $\frac{15}{500} = \frac{3}{100} = 3,0\%$

Logo, as ações de controle deverão se iniciar pelo bairro I, pois apresentou o maior índice do LIRAa.

Alternativa: A

1.6 Grandezas proporcionais

1.7 Grandezas direta e indiretamente proporcionais

(ENEM 2010- Q. 144)

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

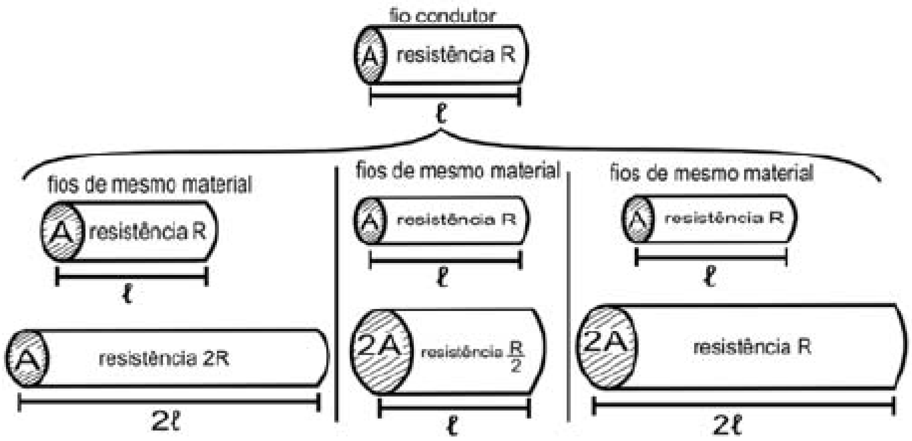
A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificam que existe proporcionalidade entre:

•Resistência (R) e comprimento (l), dada a mesma secção transversal(A);

•Resistência (R) e área da secção transversal(A), dado o mesmo comprimento (l) e

•Comprimento(l) e área da secção transversal(A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as figuras seguintes.



Disponível em: http://www.efeitojoule.com. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimentam (l), resistência (R) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

a) direta, direta e direta. b) direta, direta e inversa. c) direta, inversa e direta.

d) inversa, direta e direta. e) inversa, direta e inversa.

Resolução: Na primeira coluna da figura, com a área constante, dobrou o comprimento e dobrou a resistência. Resistência e comprimento são, pois, grandezas diretamente proporcionais.

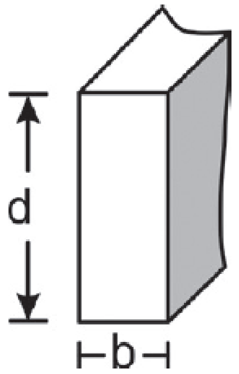
Na segunda coluna da figura, com o mesmo comprimento, a área dobrou e a resistência se reduziu à metade. Resistência e área são, portanto, grandezas inversamente proporcionais.

Na terceira coluna da figura, com a mesma resistência, o comprimento dobrou e a área também dobrou. Comprimento e área da secção transversal são, pois, grandezas diretamente proporcionais.

Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 177)

A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado da altura (d), conforme a figura. A constante de proporcionalidade k varia de acordo com o material utilizado na sua construção.



Considerando-se S como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é:

a) $S = k.b.d$ b) $S = b.d^2$ c) $S = k.b.d^2$

d) $S = \dfrac{k.b}{d^2}$ e) $S = \dfrac{k.d^2}{b}$

Resolução: Seja S a resistência da viga cuja secção transversal aparece na figura acima e k a constante de proporcionalidade do material utilizado na sua construção, de acordo com o enunciado, tem-se:

$$S = k.b.d^2$$

Como as grandezas são diretamentes proporcionais, a única coisa a se fazer é multiplicá-las as grandezas, observando que a altura d deve estar ao quadrado.

Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 153)

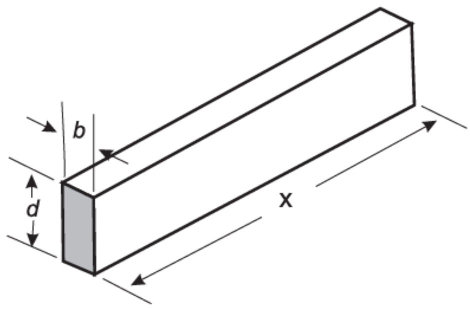
A resistência mecânica S de uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à sua largura (b) e ao quadrado de sua altura(d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.

BUSHAW, D. et al. Aplicações da matemática escolar. São Paulo: Atual, 1997.

A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é :

a) $S = \dfrac{k.b.d^2}{x^2}$ b) $S = \dfrac{k.b.d}{x^2}$ c) $S = \dfrac{k.b.d^2}{x}$

d) $S = \dfrac{k.b^2.d}{x}$ e) $S = \dfrac{k.b.2d}{2x}$



Resolução: Seja S a resistência mecânica da viga e k a sua constante de proporcionalidade. Como S é diretament proporcional a *b*, diretamente proporcional ao quadrado de d e inversamente proporcional ao quadrado de *x*, temos:

$$S = \frac{k.b.d^2}{x^2}$$

Alternativa: A

(ENEM 2013 - Q. 137 - Lei de formação)

Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante k > 0, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = K.M$ b) $S = K.M^{\frac{1}{3}}$ c) $S = K^{\frac{1}{3}}.M^{\frac{1}{3}}$

d) $S = K^{\frac{1}{3}}.M^{\frac{2}{3}}$ e) $S = k^{\frac{1}{3}}.M^2$

Resolução: Temos que o cubo da área de S(S^3) é proporcional ao quadrado de sua massa M(M^2). Supondo que $K > 0$ seja a constante de proporcionalidade, segue que:

$$S^3 = K.M^2.$$

Logo, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

$$S = \sqrt[3]{K.M^2} \Rightarrow S = \sqrt[3]{k}.\sqrt[3]{M}^2 \Rightarrow S = k^{\frac{1}{3}}.M^{\frac{2}{3}}.$$

Alternativa:D

1.7.1 Divisão em partes proporcionais

(ENEM 2012- Q. 163)

José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350 b) 300, 300, 150 c) 300, 250, 200

d) 200, 200, 100 e) 100, 100, 50

Resolução: Para estabelecer um parâmetro de comparação nas duas situações, vamos expressar a quantidade de laranjas carregada por cada um através de frações.

Se somarmos os valores da proporção que se referem ao primeiro momento, obteremos $6 + 5 + 4 = 15$. Dessa forma, podemos afirmar que as quantidades inicialmente transportadas são valores proporcionais a:

• José: $\frac{6}{15}$; • Carlos: $\frac{5}{15}$; • Paulo: $\frac{4}{15}$.

Da mesma forma, pela proporção do segundo momento, temos $4 + 4 + 2 = 10$. Podemos novamente afirmar que a quantidade de laranjas carregadas é agora proporcional a:

• José: $\frac{4}{10}$; • Carlos: $\frac{4}{10}$; • Paulo: $\frac{2}{10}$.

No entanto, apenas por essas proporções, não é tão simples verificar quem carregou mais laranjas em cada momento. Para facilitar essa visualização, vamos deixar todas as frações com um mesmo denominador.

Através da fatoração, é fácil ver que o mínimo múltiplo comum entre 10 e 15 é 30. Assim, as proporções podem ser reescritas novamente da seguinte maneira:

	José	Carlos	Paulo
1º momento	$\frac{6}{15} = \frac{12}{30}$	$\frac{5}{15} = \frac{10}{30}$	$\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$
2º momento	$\frac{4}{10} = \frac{12}{30}$	$\frac{4}{10} = \frac{12}{30}$	$\frac{2}{10} = \frac{6}{30}$

Agora podemos ver mais claramente que José manteve a quantidade de laranjas que estava carregando inicialmente e que Paulo diminuiu a sua carga. Já Carlos aumentou a quantidade que estava transportando. Logo, quem levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto foi Carlos. Considere que x seja a quantidade total de laranjas que os rapazes carregaram. Se Carlos carregava dez trinta avos do total de laranjas e, ao acrescentar 50 laranjas, passou a transportar doze trinta avos do total, chegamos à seguinte equação:

$$\frac{10}{30}.x+50=\frac{12}{30}x \Rightarrow \frac{10x+1500}{30}=\frac{12x}{30} \Rightarrow x=750.$$

Logo, o total de laranjas transportadas era de 750. Como no segundo momento, José e Carlos levaram, cada um, $\frac{4}{10}$ do total e Paulo levou $\frac{2}{10}$ do total, segue que, José, Carlos e Paulo levaram, respectivamente, no segundo momento:

• José: $\frac{4}{10}.750=300$; • Carlos: $\frac{4}{10}.750=300$;• Paulo: $\frac{2}{10}.750=150$.

Alternativa: B

(ENEM 2013- Q. 147)

Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com $14m^3$ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75. b) 2,00. c) 2,33.

d) 4,00. e) 8,00.

Resolução: Se c, a e b forem, em metros cúbicos, as quantidades de cimento, areia e brita, respectivamente, então:

$$\frac{c}{1}=\frac{a}{4}=\frac{b}{2}=\frac{c+a+b}{1+4+2}=\frac{14}{7}=2 \Rightarrow \frac{c}{1}=2 \Rightarrow c=2$$

Logo, o volume de cimento é de $2m^3$.

Alternativa: B

1.8 Escala

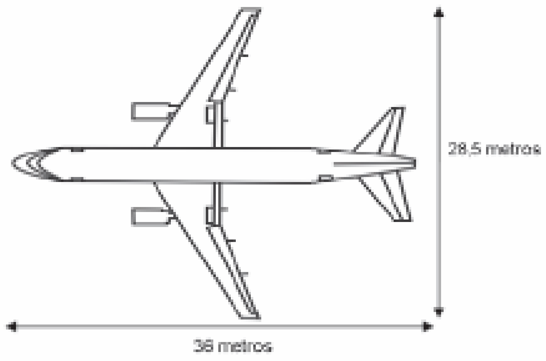
(ENEM 2009- Q. 155)

A figura a seguir mostra as medidas reais de uma aeronave que será fabricada para utilização por companhias de transporte aéreo. Um engenheiro precisa fazer o desenho desse avião em escala de 1:150.

Para o engenheiro fazer esse desenho em uma folha de papel, deixando uma margem de 1 cm em relação às bordas da folha, quais as dimensões mínimas, em centímetros, que essa folha deverá ter?

a) $2,9cm \times 3,4cm$. b) $3,9cm \times 4,4cm$. c) $20cm \times 25cm$.

d) $21cm \times 26cm$. e) $192cm \times 242cm$.



Resolução: De acordo com o enunciado, o engenheiro precisa fazer o desenho da areonave em escala 1:150. Então:

•Comprimento: $\dfrac{36m}{150cm} = \dfrac{3600cm}{150cm} = 24cm$

•Largura: $\dfrac{28,5m}{150cm} = \dfrac{2850cm}{150cm}$ = 19 cm

Como o desenho deve ter uma margem de 1 cm em relação as bordas da folha, as dimensões mínimas, em centímetros, que a folha deve ter são:

21 cm x 26 cm

Note que a resposta não é $20cm \times 25cm$, pois deve-se acrescentar 1 cm para cada borda, ou seja, 2 cm à direita, a esquerda e nas partes superior e inferior.

Alternativa: D

(ENEM 2011- Q. 143)

Sabe-se que a distância real, em linha reta, de uma cidade A, localizada no estado de São Paulo, a uma cidade B, localizada no estado de Alagoas, é igual a 2 000 km. Um estudante, ao analisar um mapa, verificou com sua régua que a distância entre essas duas cidades, A e B, era 8 cm.

Os dados nos indicam que o mapa observado pelo estudante está na escala de:

a) 1 : 250.
b) 1 : 2 500.
c) 1 : 25 000.
d) 1 : 250 000.
e) 1 : 25 000 000.

Resolução: De acordo com o enunciado, o estudante verificou com a régua que a distância entre as duas cidades é de 8 cm, porém sabemos que a distância real é 2 000 km. Portanto, o mapa do estudante está na escala de:

$$\frac{8\,cm}{2\,000\,km} = \frac{8\,cm}{200\,000\,000\,cm} = \frac{1}{25\,000;000} \Rightarrow 1 : 25\,000\,000$$

Alternativa: E

(ENEM 2011- Q. 147)

Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete?

a) 4,8 e 11,2 b) 7,0 e 3,0 c) 11,2 e 4,8

d) 28,0 e 12,0 e) 30,0 e 70,0

Resolução: Convertendo as medidas de metro para centímetros, temos:

$$28m = 2800cm$$
$$12m = 1200cm$$

Na escala de 1: 250, as medidas da maquete são:

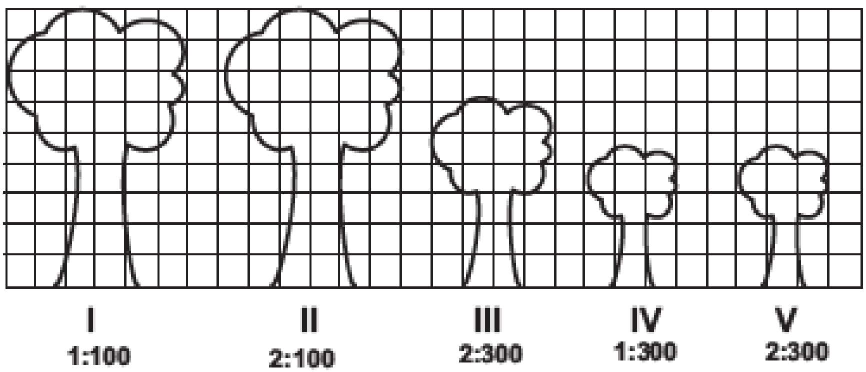
$$\frac{2800}{250} = 11,2cm$$

$$\frac{1200}{250} = 4,8cm$$

Alternativa: C

(ENEM 2012- Q. 137)

Um biólogo mediu a altura de cinco árvores distintas e representou-as em uma mesma malha quadriculada, utilizando escalas diferentes, conforme indicações na figura a seguir.



Qual é a árvore que apresenta a maior altura real?

a) I b) II c) III

d) IV e) V

Resolução: Com base nos dados apresentados, a escala apresenta a proporção do desenho para a realidade.

•Considerando o lado do quadrado do desenho como L, na figura I a altura da árvore no desenho é de *9L*. Como sua escala é de 1:100 (cada 1 unidade no desenho equivale a 100 na realidade), sua altura real é de $9L.(100) = 900L$.

•A figura II tem uma altura de *9L* no desenho, porém sua escala é de 2:100, simplificando tem-se 1:50. Assim $9L(50) = 450L$ na realidade.

•A figura III tem uma altura de 6L e escala de 2:300 ou 1:150, assim, $6L.(150) = 900L$ na realidade.

• A figura IV tem altura de 4,5L e escala de 1:300, na realidade tem $4,5L.(300) = 1350L$. A figura V tem também 4,5L de altura, porém 2:300 ou 1:150 de escala, portanto $4,5L.(150) = 675L$ na realidade.

•Logo a árvore de maior altura é a da figura IV.

Alternativa: D

(ENEM 2012- Q. 161)

O esporte de alta competição da atualidade produziu uma questão ainda sem resposta: Qual é o limite do corpo humano? O maratonista original, o grego da lenda, morreu de fadiga por ter corrido 42 quilômetros. O americano Dean Karnazes, cruzando sozinho as planícies da Califórnia, conseguiu correr dez vezes mais em 75 horas.

Um professor de Educação Física, ao discutir com a turma o texto sobre a capacidade do maratonista americano, desenhou na lousa uma pista reta de 60 centímetros, que representaria o percurso referido.

Disponível em: http://veja.abril.com.br. Acesso em: 25 jun. 2011 (adaptado).

Se o percurso de Dean Karnazes fosse também em uma pista reta, qual seria a escala entre a pista feita pelo professor e a percorrida pelo atleta?

a) 1:700
b) 1:7 000
c) 1:70 000
d) 1:700 000
e) 1:7 000 000

Resolução: A escala mostra a proporção entre o desenho e a realidade. O atleta percorreu uma distância dez vezes maior que a maratona, portanto 420Km. Convertendo esta distância para centímetros, temos 420Km = 42 000 000cm, assim 60: 42 000 000. Simplificando tem-se 1 : 700 000.

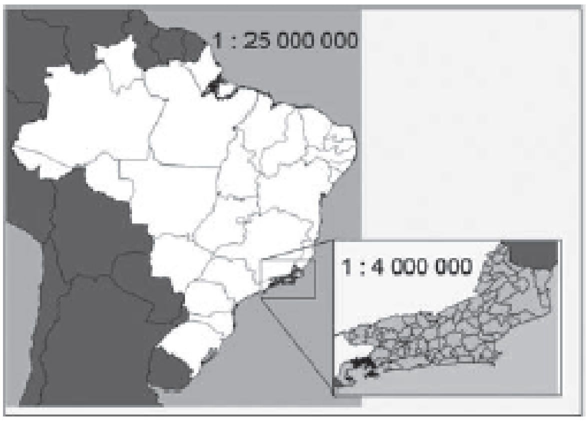
Alternativa: D

(ENEM 2013- Q. 167)

A figura apresenta dois mapas, em que o estado do Rio de Janeiro é visto em diferentes escalas.

Há interesse em estimar o número de vezes que foi ampliada a área correspondente a esse estado no mapa do Brasil.

Esse número é:



a) menor que 10.

b) maior que 10 e menor que 20.

c) maior que 20 e menor que 30.

d) maior que 30 e menor que 40.

e) maior que 40.

Resolução: Com base nos dados apresentados, a escala mostra a relação entre duas medidas lineares, a do desenho e a da realidade. No mapa do Brasil, cada 1 unidade no desenho equivale a 25.000.000 na realidade, enquanto que no mapa do Rio de Janeiro a mesma unidade equivale a 4.000.000, ou seja, o aumento linear foi de:

$$\frac{250\,000\,000}{4\,000\,000} = \frac{25}{4}$$

O aumento da área é igual ao quadrado do aumento linear, ou seja:

$$(\tfrac{25}{4})^2 = \frac{625}{16} = 39,0625.$$

Logo, o valor encontrado está entre 30 e 40.

Alternativa: D

(ENEM 2013- Q. 180)

A Secretaria de Saúde de um município avalia um programa que disponibiliza, para cada aluno de uma escola municipal, uma bicicleta, que deve ser usada no trajeto de ida e volta, entre sua casa e a escola. Na fase de implantação do programa, o aluno que morava mais distante da escola realizou sempre o mesmo trajeto, representado na figura, na escala 1 : 25 000, por um período de cinco dias.

Quantos quilômetros esse aluno percorreu na fase de implantação do programa?

a) 4.

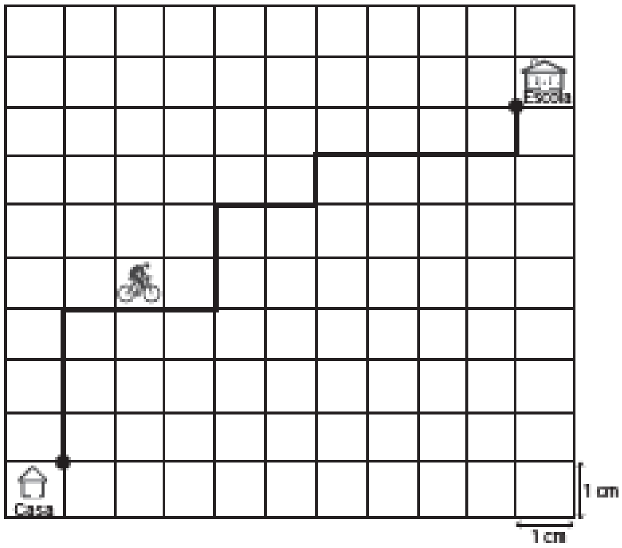
b) 8.

c) 16.

d) 20.

e) 40

Resolução: Como cada 1 cm equivale a 25000 cm no trajeto real, temos que o aluno percorreu por dia, sendo ida e volta, a quantidade de:



$$2.(16).(25000)cm = 8000000cm = 8 \text{ km}$$

Assim, o número de quilômetros que esse aluno percorreu na fase de implantação do programa foi 5. 8 km = 40 km.

Alternativa: E

(ENEM 2014- Q. 136)

A Figura 1 representa uma gravura retangular com 8 m de comprimento e 6 m de altura.

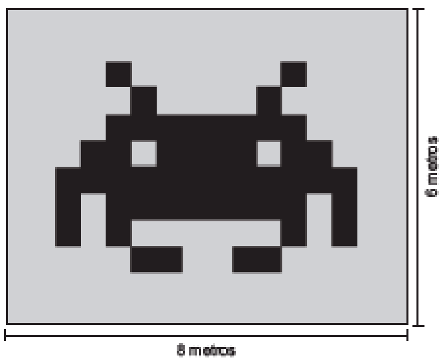


Figura 1

Deseja-se reproduzi-la numa folha de papel retangular com 42 cm de comprimento e 30 cm de altura, deixando livres 3 cm em cada margem, conforme a Figura 2.
A reprodução da gravura deve ocupar o máximo possível da região disponível, mantendo-se as proporções da Figura 1.

PRADO, A. C. Superinteressante, ed. 301, fev. 2012 (adaptado).

A escala da gravura reproduzida na folha de papel é:

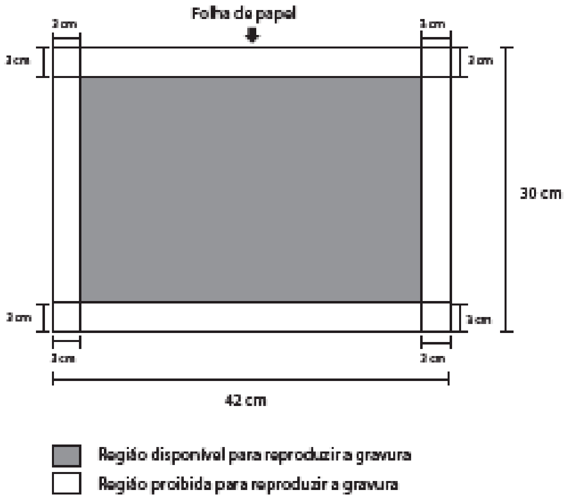


Figura 2

a) 1 : 3. b) 1 : 4. c) 1 : 20.

d) 1 : 25. e) 1 : 32.

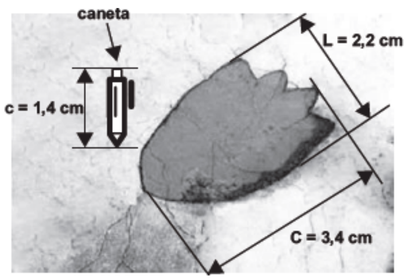
Resolução: De acordo com o enunciado, a figura possui dimensões 8 m x 6 m, o que equivale a 800 cm x 600 cm. Como se deseja reduzir a figura, deixando livres 3 cm de margem, logo a folha passará a ter dimensões 36 cm x 24 cm. Portanto, fazendo a razão entre os lados temos que $\frac{800}{36}$ é aproximadamente 22 e $\frac{600}{24} = 25$.

Assim, a gravura ocupará o máximo possível da folha de papel se for desenhada na escala 1 : 25.

Alternativa: D

(ENEM 2015- Q. 144)

Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura(L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.



A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a:

a) 4,9 e 7,6. b) 8,6 e 9,8. c) 14,2 e 15,4.

d) 26,4 e 40,8. e) 27,5 e 42,5.

Resolução: Analisando o desenho, vemos que, na foto, o comprimento *c* da caneta é de 1,4 cm. Como o seu comprimento real é 16,8 cm, segue que a escala da fotografia é:;

$$\frac{1,4}{16,8} = \frac{1}{12}.$$

Ou seja, a foto diminuiu em 12 vezes o tamanho real.

Assim, basta multiplicarmos o comprimento e a largura da pegada na foto por 12 para encontrarmos os valores reais:

$$\text{Largura da pegada} = 2,2 \times 12 = 26,4cm$$
$$\text{Comprimento da pegada} = 3,4 \times 12 = 40,8cm$$

Portanto, a largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros, são, respectivamente, iguais a 26,4 e 40,8.

Alternativa: D

(ENEM 2016- Q. 176)

Em uma empresa de móveis, um cliente encomenda um guarda-roupa nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1 : 8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento de impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente,

a) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm.
b) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm.
c) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm.
d) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm.
e) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm.

Resolução: Como o projetista elaborou os móveis na escala 1:8, temos que cada 8 cm do móvel anterior equivale a 1 cm do móvel atual. Assim, temos que as dimensões do guarda-roupa na escala 1:8 são:

$$\frac{220}{8} = 27,5 \text{ cm.}$$
$$\frac{120}{8} = 15 \text{ cm.}$$
$$\frac{50}{8} = 6,25 \text{ cm.}$$

As dimensões do guarda-roupa, após a redução de 20% feita na impressora são:

27,5 . 0,8 cm = 22 cm de altura
15 . 0,8 cm = 12 cm de largura
6,25 . 0,8 cm = 5 cm de profundidade

Logo, a altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente: 22 cm, 12 cm e 5 cm.

Alternativa: A

1.9 Razão

(ENEM 2010- Q. 138)

No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama,no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu."

Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm.

Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1 : 20
b) 1 : 100
c) 1 : 200
d) 1 : 1 000
e) 1 : 2 000

Resolução: Sendo 42 m = 4200 cm o diâmetro do espelho primário do telescópio e 2,1 cm o diâmetro do olho humano, a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano e o diâmetro primário do telescópio citado é:

$$\frac{2,1}{4200} = \frac{21}{42000} = \frac{1}{2000}$$

Alternativa: E

(ENEM 2011- Q. 164 - Densidade demográfica)

Cerca de 20 milhões de brasileiros vivem na região coberta pela caatinga, em quase 800 mil km^2 de área. Quando não chove, o homem do sertão e sua família precisam caminhar quilômetros em busca da água dos açudes. A irregularidade climática é um dos fatores que mais interferem na vida do sertanejo.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010.

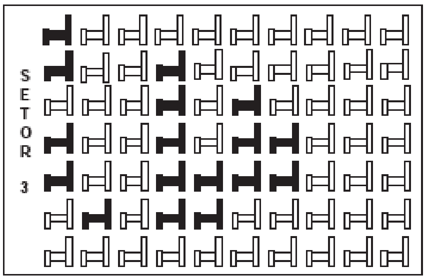
Segundo este levantamento, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de:

a) 250.
b) 25.
c) 2,5.
d) 0,25.
e) 0,025.

Resolução: Densidade demográfica é a razão entre o número de habitantes por quilômetro quadrado, logo, com base nos dados apresentados, a densidade demográfica da região coberta pela caatinga, em habitantes por km^2, é de:

$$\frac{20\ milhões}{800\ mil} = \frac{20.10^6}{800.10^3} = \frac{2}{80}.10^3 = \frac{2000}{80} = \frac{200}{8} = \frac{100}{4} = 25.$$

Alternativa: B



(ENEM 2013- Q. 140)

Em um certo teatro, as poltronas são divididas em setores. A figura apresenta a vista do setor 3 desse teatro, no qual as cadeiras escuras estão reservadas e as claras não foram vendidas.

A razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

a) $\frac{17}{70}$ b) $\frac{17}{53}$ c) $\frac{53}{70}$

d) $\frac{53}{17}$ e) $\frac{70}{17}$

Resolução: Analisando a imagem apresentada, podemos notar que o setor 3 possui 7 filas com 10 cadeiras em cada, resultando em 70 cadeiras no total. Do total de cadeiras, apenas 17 foram reservadas.

Logo, a razão que representa a quantidade de cadeiras reservadas do setor 3 em relação ao total de cadeiras desse mesmo setor é:

$$\frac{17}{70}.$$

Alternativa: A

(ENEM 2014- Q. 149)

Boliche é um jogo em que se arremessa uma bola sobre uma pista para atingir dez pinos, dispostos em uma formação de base triangular, buscando derrubar o maior número de pinos. A razão entre o total de vezes em que o jogador derruba todos os pinos e o número de jogadas determina seu desempenho.

Em uma disputa entre cinco jogadores, foram obtidos os seguintes resultados:

•Jogador I – Derrubou todos os pinos 50 vezes em 85 jogadas.

•Jogador II – Derrubou todos os pinos 40 vezes em 65 jogadas.

•Jogador III – Derrubou todos os pinos 20 vezes em 65 jogadas.

•Jogador IV – Derrubou todos os pinos 30 vezes em 40 jogadas.

•Jogador V – Derrubou todos os pinos 48 vezes em 90 jogadas.

Qual desses jogadores apresentou maior desempenho?

a) I b) II c) III

d) IV e) V

Resolução: Com base nos dados apresentados, a razão entre o total de vezes em que o jogador derruba os pinos e o número de jogadas determina o desempenho dos jogadores. Vamos, então, calcular o desempenho de cada jogador:

•Jogador I: $\frac{50}{85} \cong 0,58$

•Jogador II: $\frac{40}{65} \cong 0,62$

•Jogador III: $\frac{20}{65} \cong 0,31$

•Jogador IV: $\frac{30}{40} = 0,75$

•Jogador V: $\frac{48}{90} \cong 0,53$

Com base nos resultados encontrados, como a maior razão foi do jogador IV, podemos concluir que ele obteve o melhor desempenho.

Alternativa: D

(ENEM 2014- Q. 168)

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é:

a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{8}{7}$

d) $\frac{8}{9}$ e) $\frac{9}{8}$

Resolução: Como a espessura da porta foi preservada, podemos desconsidera-la. Sejam h_0 e l_0 a altura e a largura da porta, respectivamente, antes do aumento na altura e redução da largura. E sejam h_1 e l_1 a altura e a largura da porta, respectivamente, após o aumento de $\frac{1}{8}$ na altura da porta. Segue que: $h_1 = h_0 + \frac{1}{8}h_0 = \frac{9}{8}h_0$

Considerando que o custo com o material deve se manter, e como não houve alternação na espessura, segue que o produto entre a largura e a altura (área de uma face da porta) se manteve, ou seja:

$$h_0 \times l_0 = h_1 \times l_1 \Rightarrow$$

$$h_0 \times l_0 = \frac{9}{8}h_0 \times l_1 \Rightarrow$$

$$l_0 = \frac{9}{8} \times l_1 \Rightarrow$$

$$\frac{l_1}{l_0} = \frac{9}{8}$$

Alternativa: D

(ENEM 2016- Q. 149)

Cinco marcas de pão integral apresentam as seguintes concentrações de fibras (massa de fibra por massa de pão):

•Marca A: 2g de fibras a cada 50g de pão;
•Marca B: 5g de fibras a cada 40g de pão;
•Marca C: 5g de fibras a cada 100 g de pão;
•Marca D: 6g de fibras a cada 90 g de pão;
•Marca E: 7g de fibras a cada 70 g de pão.

Recomenda-se a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras.

Disponível em: www.blog.saude.gov.br. Acesso em: 25 fev. 2013.

A marca a ser escolhida é:

a) A. b) B. c) C.

d) D. e) E.

Resolução: Com base nos dados apresentados, temos que a razão entre a quantidade de fibras e cada grama de pão é:

•Marca A: $\frac{2}{50} = 0,04$;

•Marca B: $\frac{5}{40} = 0,125$;

•Marca C: $\frac{5}{100} = 0,05$;

Marca D: $\frac{6}{90} = 0,0666...$;

Marca E: $\frac{7}{70} = 0,1$.

Como é recomendado a ingestão do pão que possui a maior concentração de fibras, segue que a marca a ser escolhida deve ser a B.

Alternativa: B

(ENEM 2016- Q. 173)

Diante da hipótese do comprometimento da qualidade da água retirada do volume morto de alguns sistemas hídricos, os técnicos de um laboratório decidiram testar cinco tipos de filtros de água.

Dentre esses, os quatro com melhor desempenho serão escolhidos para futura comercialização.

Nos testes, foram medidas as massas de agentes contaminantes, em miligrama, que não são capturados por cada filtro em diferentes perídos, em dia, como segue:

•Filtro 1 (F1): 18 mg em 6 dias;

•Filtro 2 (F2): 15 mg em 3 dias;

•Filtro 3 (F3): 18 mg em 4 dias;

•Filtro 4 (F4): 6 mg em 3 dias;

•Filtro 5 (F5): 3 mg em 2 dias.

Ao final, descarta-se o filtro com o maior razão entre a medida da massa de contaminantes não capturados e o número de dias, o que corresponde ao de pior desempenho.

Disponível em: www.redebrasilatual.com.br. Acesso em: 12 jul. 2015 (adaptado).

O filtro descartado é:

a) F1. b) F2. c) F3.

d) F4. e) F5.

Resolução: De acordo com os dados apresentados, as razões entre a medida da massa de, agentes contaminantes não capturados e o número de dias para cada filtro, são:

•I)Filtro 1(F1): $\dfrac{18\,mg}{6\,dias} = 3$ mg/dia.

•II)Filtro 2(F2): $\dfrac{15\,mg}{3\,dias} = 5$ mg/dia

•III)Filtro 3(F3): $\dfrac{18\,mg}{4\,dias} = 4,5$ mg/dia

•IV)Filtro 4(F4): $\dfrac{6\,mg}{3\,dias} = 2$ mg/dia

•V)Filtro 5(F5): $\dfrac{3\,mg}{2\,dias} = 1,5$ mg/dia

Portanto, o filtro de pior desempenho é o filtro II(F2).

Alternativa: B

(ENEM 2016- Q. 168)

Densidade absoluta (d) é a razão entre a massa de um corpo e o volume por ele ocupado. Um professor propôs à sua turma que os alunos analisassem a densidade de três corpos: d_A, d_B, d_C. Os alunos verificaram que o copo A possuía 1,5 vez a massa do corpo B e esse, por sua vez, tinha $\frac{3}{4}$ da massa do corpo C. Observaram, ainda, que o volume do corpo A era o mesmo do corpo B e 20% maior do que o volume do corpo C.

Após a análise, os alunos ordenaram corretamente as densidades desses corpos da seguinte maneira:

a) $d_B < d_A < d_C$ b) $d_B = d_A < d_C$ c) $d_C < d_B = d_A$

d) $d_B < d_C < d_A$ e) $d_C < d_B < d_A$

Resolução: De acordo com o enunciado, temos que:

• Massas:

$$*m_A = 1,5m_B$$
$$*m_B = \frac{3}{4}m_C \Rightarrow m_C = \frac{4}{3}m_B$$

• Volumes:

$$*V_A = V_B = 1,2V_C \Rightarrow$$
$$*V_B = V_A$$

$$*V_C = \frac{1}{1,2}V_B = \frac{1}{\frac{12}{10}}V_B = \frac{10}{12}V_B = \frac{5}{6}V_B$$

• Densidades:

$$*d_A = \frac{m_A}{V_A} = \frac{1,5m_B}{V_B} = 1,5d_B$$

$$*d_B = 1\frac{m_B}{V_B}$$

$$d_C = \frac{m_C}{m_C} = \frac{\frac{4}{3}m_B}{\frac{5}{6}V_B} = \frac{4}{3}.\frac{6}{5}\frac{m_B}{V_B} = \frac{8}{5}\frac{m_B}{V_B} = 1,6d_B$$

Assim, podemos concluir que: $d_B < d_A < d_C$

Alternativa: A

1.10 Regra de três simples

(ENEM 2009- Q. 163)

Segundo as regras da Fórmula 1, o peso mínimo do carro, de tanque vazio, com o piloto, é de 605 kg, e a gasolina deve ter densidade entre 725 e 780 gramas por litro. Entre os circuitos nos quais ocorrem competições dessa categoria, o mais longo é *Spa-Francorchamps*, na Bélgica, cujo traçado tem 7 km de extensão. O consumo médio de um carro da Fórmula 1 é de 75 litros para cada 100 km.

Suponha que um piloto de uma equipe específica, que utiliza um tipo de gasolina com densidade de 750 g/L, esteja no circuito de Spa-Francorchamps, parado no box para reabastecimento. Caso ele pretenda dar mais 16 voltas, ao ser liberado para retornar à pista, seu carro deverá pesar, no mínimo,

a) 617 kg. b) 668 kg. c) 680 kg.

d) 689 kg. e) 717 kg.

Resolução: De acordo com o enunciado, o combustível colocado no carro deve ser capaz de percorrer uma distância de 16.(7)km = 112 km. Como o consumo médio é de 75 litros a cada 100 litros. Temos:

$$100km - 75L$$
$$112km - xL$$

O total a ser colocado é de 84 litros. Como a densidade é de 750 g/l, esses 84 litros têm massa ("pesam") 84 . 750 g = 6300 g = 63 kg.

Nessas condições, o "peso"mínimo do carro, incluindo piloto e combustível, será de (605 + 63) kg = 668 kg.

Alternativa: B

(ENEM 2010- Q. 176)

A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabe 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, nº 25, 25 jun. 2008 (adaptado)

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

a) 406. b) 1 334. c) 4 002.

d) 9 338. e) 28 014.

Resolução:Entendendo o trecho “dentro dele cabem” como “tem volume igual a” segue, por exemplo, que a expressão *1 Netuno = 58 Terras* significa que o volume de 1 Netuno é igual ao volume de 58 Terras. Então, de acordo com o enunciado:

- Netuno é o quarto maior, dentro dele cabem 58 terras;
- Júpiter é o maior dos planetas, dentro dele cabem 23 Netunos, isto é:

$$1 \text{ Netuno} = 58 \text{ Terras}$$
$$1 \text{ Júpiter} = 23 \text{ Netunos} = x \text{ Terras}$$

Como as grandezas são diretamente proporcionais, os valores serão multiplicados em forma de *X*. Logo:

$$x = 58 \times 23 = 1334.$$

Assim, 1 Júpiter = 23 Netunos = 1.334 Terras.

Alternativa: B

(ENEM 2010- Q. 177)

Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas Veja (ed. 2055), Cláudia (ed. 555), National Geographic (ed. 93) e Nova Escola (ed. 208) (adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana.

Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

a) 10^{-2}
b) 10^3
c) 10^4
d) 10^6
e) 10^9

Resolução: Se 10 litros de óleo proveniente de frituras contaminam 10^7 litros de água potável, então 1000 litros de óleo contaminam:

$$10 \text{ L de oléo} — 10^7 \text{ L de água}$$
$$1000 \text{ L} — x \text{ L de água}$$

$$10x = 1000.10^7 \Rightarrow x = \frac{1000.10^7}{10} \Rightarrow x = 100.10^7 = 1.10^9$$

Portanto, são contaminados 10^9 litros de água por semana nessa cidade.

Alternativa: E

(ENEM 2011- Q. 146)

Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.
- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: http://cyberdiet.terra.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.

A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

a) 50 minutos. b) 60 minutos. c) 80 minutos.

d) 120 minutos. e) 170 minutos.

Resolução: Para que essa pessoa gaste, exatamente, 200 calorias em cada atividade , ela deverá:

•Fazer agachamentos:

100 calorias – 20 minutos
200 calorias – x minutos

$$100x = 4000 \Rightarrow x = 40 \text{ minutos.}$$

•Ir ao supermercado:

30 minutos – 100 calorias
x – 200 calorias

$$100x = 6000 \Rightarrow x = 60 \text{ minutos.}$$

•Cuidar do jardim: por 30 minutos gastam 200 calorias.
•Passear com o cachorro: por 30 minutos gastam 200 calorias.
•Tirar o pó dos movéis:

150 calorias — 30 minutos
200 calorias — x

$$150x = 6000 \Rightarrow x = 40 \text{ minutos.}$$

•Lavar roupa: por 30 minutos gastam 200 calorias.

Dessa maneira, para realizar todas as atividades, gastando exatamente 200 calorias em cada uma, são necessários:

$$40 + 60 + 30 + 30 + 40 + 30 = 230 \text{ minutos.}$$

Considerando que para realizar as tarefas conforme indicadas no texto são necessários: $20+30+30+30+30+30 = 170$ minutos, para realizar os ajustes são necessários mais :

$$230–170 = 60 \text{ minutos.}$$

Alternativa: B

(ENEM 2011- Q. 163)

Muitas medidas podem ser tomadas em nossas casas visando à utilização racional de energia elétrica. Isso deve ser uma atitude diária de cidadania. Uma delas pode ser a redução do tempo no banho. Um chuveiro com potência de 4800 W consome 4,8 kW por hora.

Uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, consumirá, em sete dias, quantos kW?

a) 0,8 b) 1,6 c) 5,6

d) 11,2 e) 33,6

Resolução: Se uma pessoa que toma dois banhos diariamente, de 10 minutos cada, ela irá gastar, por dia:

$$2 \times 10 \text{ minutos} = 20 \text{ minutos.}$$

Em sete dias, ela irá gastar (7×20 minutos) = 140 minutos.

De acordo com o enunciado, um chuveiro com potência de 4800 W consome 4,8 KW por hora. Então:

4,8 kW — 60 minutos
x kW — 140 minutos

$$60x = 140.(4,8) \Rightarrow 60x = 672 \Rightarrow x = \frac{672}{60} = 11,2kW.$$

Logo, a pessoa irá consumir 11,2 kW por semana.

Alternativa: D

(ENEM 2012 - Q. 152)

A capacidade mínima, em BTU/h, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao sol, pode ser determinada da seguinte forma:

•600 BTU/h por m^2, considerando-se até duas pessoas no ambiente;

•para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar 600 BTU/h;

•acrescentar mais 600 BTU/h para cada equipamento eletroeletrônico em funcionamento no ambiente.

Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala, sem exposição ao sol, de dimensões 4 m x 5 m, em que permaneçam quatro pessoas e possua um aparelho de televisão em funcionamento.

A capacidade mínima, em BTU/h, desse aparelho de arcondicionado deve ser:

a) 12 000. b) 12 600. c) 13 200.

d) 13 800. e) 15 000.

Resolução: A área do ambiente é de 4 m x 5 m = 20 m^2. Como são 600 BTU/h a cada m^2 , considerando-se até duas pessoas no ambiente,e a sala possui 20 m^2, são:

600 BTU/h — 1 m^2
x BTU/h – 20 m^2

$$\Rightarrow x = 1200 BTU/h.$$

Acrescenta-se ainda 600 . 2 = 1200 BTU/h pelas duas pessoas a mais e 600 BTU/h pela televisão em funcionamento.

No total são: 12000 + 1200 + 600 = 13800 BTU/h.

Alternativa: D

(ENEM 2012- Q. 160)

Uma mãe recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 5 gotas para cada 2 kg de massa corporal a cada 8 horas.

Se a mãe ministrou corretamente 30 gotas do remédio a seu filho a cada 8 horas, então a massa corporal dele é de:

a) 12 kg. b) 16 kg. c) 24 kg.

d) 36 kg. e) 75 kg.

Resolução: De acordo com o enunciado, são ministradas 5 gotas de medicamento para cada 2 kg. Se a mãe ministrou 30 gostas, o filho possui:

5 gotas – 2 kg
30 gotas – x kg

Logo, a massa corporal da criança é de 12 kg.

Alternativa: A

(ENEM 2012- Q. 180)

Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3’ 0” a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60’ e 1’ equivale a 60”.

PAVARIN, G. **Galileu**, fev. 2012 (adaptado).

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é:

a) 124,02°. b) 124,05°. c) 124,20°.

d) 124,30°. e) 124,50°.

Resolução: Como 60′ equivale a 1°, segue que:

60’ – 1°
3’ – x°

$$60x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{60} = 0,05ř$$

Portanto, a representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é: 124°3’ = 124° + 0,05° = 124,05°.

Alternativa: B

(ENEM 2013- Q. 159)

Uma torneira não foi fechada corretamente e ficou pingando, da meia-noite às seis horas da manhã, com a frequência de uma gota a cada três segundos. Sabe-se que cada gota d’agua tem volume de 0,2 mL.

Qual foi o valor mais aproximado do total de água desperdiçada nesse período, em litros?

a) 0,2. b) 1,2. c) 1,4.

d) 12,9. e) 64,8.

Resolução: Como a torneira pingou da meia-noite às seis horas da manhã, foram seis horas de desperdício de água. Fazendo a conversão de horas para segundos, obtemos, que, em 6 h há:

6 × 60 minutos = 360 minutos ⇒ 360 × 60 segundos = 21600 segundos.

Como a torneira desperdiça uma gota de água a cada três segundos. Temos que:

1 gota — 3 segundos
x gotas — 21600 segundos

$$\Rightarrow 3x = 21600 \Rightarrow x = \frac{21600}{3} = 7200.$$

Logo, serão pi ngadas 7200 gotas de água durante este intervalo de tempo.

Se cada gota d’água tem volume de 0,2 ml, foram 7200 . 0,2 = 1440 mililitros de água desperdiçadas. Transformando mililitros em litros, obtemos:

$$\frac{1440}{1000} ml = 1,44 \text{ litros}$$

Portanto, o valor mais aproximado é de 1,4 litros.

Alternativa: C

(ENEM 2014- Q. 144)

Um show especial de Natal teve 45 000 ingressos vendidos. Esse evento ocorrerá em um estádio de futebol que disponibilizará 5 portões de entrada, com 4 catracas eletrônicas por portão. Em cada uma dessas catracas, passará uma única pessoa a cada 2 segundos. O público foi igualmente dividido pela quantidade de portões e catracas, indicados no ingresso para o show, para a efetiva entrada no estádio. Suponha que todos aqueles que compraram ingressos irão ao show e que todos passarão pelos portões e catracas eletrônicas indicados.

Qual é o tempo mínimo para que todos passem pelas catracas?

a) 1 hora.
b) 1 hora e 15 minutos.
c) 5 horas.
d) 6 horas.
e) 6 horas e 15 minutos.

Resolução: De acordo com o enunciado, são 5 portões, cada um com 4 catracas. Logo, temos um total de 20 catracas. O número de pessoas que passa por cada catraca é :

$$\frac{45000}{20} = 2250$$

Como passa uma única pessoa nas catracas a cada 2 segundos, segue que o tempo mínimo para que todos passem pelo portões de entrada é de:

1 pessoa — 2 seg
2250 pessoas — x seg

$$\Rightarrow x = 4500\ seg = 3600\ seg + 900\ seg = 1h + 15min.$$

Alternativa: B

(ENEM 2015- Q. 173)

Alguns medicamentos para felinos são administrados com base na superfície corporal do animal. Foi receitado a um felino pesando 3,0 kg um medicamento na dosagem diária de 250 mg por metro quadrado de superfície corporal. O quadro apresenta a relação entre a massa do felino, em quilogramas, e a área de sua superfície corporal, em metros quadrados.

Relação entre a massa de um felino e a área de sua superfície corporal

Massa (kg)	Área (m^2)
1,0	0,100
2,0	0,159
3,0	0,208
4,0	0,252
5,0	0,292

NORSWORTHY, G. D. O paciente felino. São Paulo: Roca, 2009.

A dose diária, em miligramas, que esse felino deverá receber é de:

a) 0,624.
b) 52,0.
c) 156,0.
d) 750,0.
e) 1 201,9.

Resolução: Como o felino tem 3,0 kg de massa, segue, de acordo com o quadro, que sua área corporal é $0,208m^2$. Como a dosagem diária do medicamento deve ser 250 mg por metro quadrado de superfície corporal, sendo x mg a dose diária que esse felino deverá receber, temos:

250 mg – 1 m^2
x mg – 0,208 m^2

$$\Rightarrow x = 52mg$$

Alternativa: B

(ENEM 2016- Q. 161)

Um paciente necessita de reidratação endovenosa feita por meio de cinco frascos de soro durante 24 h. Cada frasco tem um volume de 800 mL de soro. Nas primeiras quatro horas, deverá receber 40% do total a ser aplicado. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas.

O número de gotas por minuto que o paciente deverá receber após as quatro primeiras horas será:

a) 16.
b) 20.
c) 24.
d) 34.
e) 40.

Resolução: Como o paciente vai receber, durante 24 h, reidratação endovenosa por meio de 5 frascos e, cada frasco tem um volume de 800 mL, segue que a dosagem total será de:

$$5 \times 80ml = 4000ml.$$

Nas primeiras 4 horas, o paciente deverá receber 40% do total a ser aplicado, ou seja:

$$40\% \text{ de } 800\ mL = 0,4 \times 800\ mL = 1600\ mL.$$

Restando então, (4000 mL -1600 mL) = 2400 mL para as demais 20 horas. Cada mililitro de soro corresponde a 12 gotas, logo, 2400 mL corresponderão a:

1 mL — 12 gotas
2400 mL — x gotas

Logo, para as demais 20 horas, que correspondem a 20 × 60 minutos = 1200 minutos, o paciente receberá, a cada minuto, 28800 ÷ 1200 = 24 gotas por minuto.

Alternativa: C

1.11 Regra de três composta

(ENEM 2009- Q. 162)

Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg.
b) 800 kg.
c) 720 kg.
d) 600 kg.
e) 570 kg.

Resolução: Vamos resolver o problema utilizando um esquema de regra de três composta, onde setas de mesmo sentido indicam que as grandezas são diretamente proporcinais à grandeza que possui variável x:

Alimentos (kg)	Tempo (dias)	Horas/dia	N° de alunos
120	10	3	20
x	20	4	50

Logo:

$$\frac{120}{x} = \frac{10}{20}.\frac{3}{4}.\frac{20}{50} \Rightarrow \frac{120}{x} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3x = 2400 \Rightarrow x = 800\ kg.$$

Portanto, ao final do prazo estipulado, a quantidade de alimentos arrecadados seria de 800 kg.

Alternativa: A

CAPÍTULO 2

Álgebra

Neste capítulo, destacamos que apenas 1 questão envolve o conteúdo de matrizes, mais especificamente, multiplicação de matrizes. Sete questões são sobre Sequências e as demais, 44, o que corresponde a 85% das questões do Capítulo, são sobre funções.

2.1 Função

2.1.1 Equação do 1º grau

(ENEM 2009 - Q. 152)

Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00.

De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

a) R$ 14,00. b) R$ 17,00. c) R$ 22,00.

d) R$ 32,00. e) R$ 57,00.

Resolução: Como as despesas deverão ser divididas igualmente entre as 55 pessoas, cada uma delas pagará um valor x igual para todos, assim a despesa (D) pode ser escrita como:

$$D = 55x$$

Sabemos que no início estava faltando R$510,00 para completar o valor da despesa e, nessa ocasião, havia 50 pessoas. Como ficou determinado que cada uma delas pagaria 7 reais a mais, depois que chegaram as 5 pessoas, anteriormente cada uma das 50 pessoas estava pagando (x-7) reais. Assim, anteriormente a despesa era dada por:

$$D = 50(x - 7) + 510$$

Igualando as duas equações temos:

$$
\begin{gathered}
50(x-7)+510=55x \Rightarrow \\
50x-350+510=55x \Rightarrow \\
50x+160=55x \Rightarrow \\
160=55x-50x \Rightarrow \\
160=5x \Rightarrow \\[1em]
x=\frac{160}{5} \Rightarrow \\[1em]
x=32
\end{gathered}
$$

Logo, o valor da cota calculada para cada pessoa é de R$32,00.
Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 169)

O Salto Triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: www.cbat.org.br (adaptado).

Um atleta da modalidade Salto Triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

a) 4,0 m e 5,0 m.
b) 5,0 m e 6,0 m.
c) 6,0 m e 7,0 m.
d) 7,0 m e 8,0 m.
e) 8,0 m e 9,0 m.

Resolução: Seja x o alcance do primeiro salto. Como o alcance no segundo salto diminui 1,2 m em relação ao primeiro, segue que este pode ser indicado por (x-1,2). De maneira semelhante, o alcance no terceiro salto pode ser indicado por [(x-1,2)-1,5]. Para atingir a meta de 17,4 m nessa prova, deve-se ter:

$$
\begin{gathered}
x+(x-1,2)+[(x-1,2)-1,5]=17,4 \Rightarrow \\
x+x-1,2+x-1,2-1,5=17,4 \Rightarrow \\
3x=17,4+1,2+1,2+1,5 \Rightarrow \\
3x=21,3 \Rightarrow \\
x=7,1
\end{gathered}
$$

Portanto, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre 7,0 e 8,0 m.
Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 153)

Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão do veículo, causas frequentes de acidentes.

Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos.

Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

a) 300 tijolos.   b) 360 tijolos.   c) 400 tijolos.

d) 480 tijolos.   e) 600 tijolos.

Resolução: Seja x e y, respectivamente, os "pesos"de uma telha e de um tijolo. Como o caminhão pode transportar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos, temos que:

$$I)1500x = 1200y \Rightarrow x = \frac{1200}{1500}y \Rightarrow x = \frac{4}{5}y$$

II)O caminhão poderá receber (1500-900)telhas=600 telhas que "pesam"...

$$600x = 600.\frac{4}{5}y \Rightarrow x = 480y$$

Logo, podem ser acrescentado à carga 480 tijolos.
Alternativa: D

Razão

Essa é uma questão que pode ser trabalhada no contexto de razão. Vejamos:

O caminhão pode suportar até 1200 tijolos ou 1500 telhas. A razão entre o número máximo de tijolos e o de telhas que o caminhão pode carregar é $\frac{1200}{1500} = \frac{4}{5}$. Ou seja, levar 5 telhas é o mesmo que levar 4 tijolos. Fazendo uma regra de três simples, temos que:

5 telhas - 4 tijolos
900 telhas - x tijolos

Como tratam de grandezas diretamente proporcionais se o número de tijolos aumenta, o de telha também aumentará- multiplicaremos cruzado. Portanto, temos:

$$5x = 3600 \Rightarrow x = \frac{3600}{5} \Rightarrow x = 720 \text{ tijolos.}$$

Isto é, 720 tijolos equivalem a 900 telhas. Como o caminhão pode transportar no máximo 1200 tijolos, ainda pode ser adicionado à carga mais (1200-720)=480 tijolos.

(ENEM 2013 - Q. 164)

Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verdeamarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fique acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante X segundos e cada ciclo dura Y segundos.

Qual é a expressão que representa a relação entre X e Y?

a) $5x-3y+15=0$ b) $5x-2y+10=0$ c) $3x-3y+15=0$

d) $3x-2y+15=0$ e) $3x-2y+10=0$

Resolução: Considerando Z o tempo em que a luz vermelha fica acesa a cada ciclo, é válida a relação X = $\frac{2}{3}$ Z, sendo X o tempo que a luz verde fica acesa. Sendo assim, $Z=\frac{3}{2}X$. (1)

Como Y é o tempo total do ciclo (verde-amarelo-vermelho), temos que:

$$Y=5+X+Z \text{ (2)}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$Y=5+X+\frac{3}{2}X \Rightarrow$$
$$\frac{2Y}{2}=\frac{10+2X+3X}{2} \Rightarrow$$

$$2Y=5X+10 \Rightarrow 5X+10=2Y \Rightarrow 5X-2Y+10=0$$

Portanto, a lei que representa essa relação é: $W=5X-2Y+10$.
Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 175)

Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era:

a) $R\$166,00$. b) $R\$156,00$. c) $R\$84,00$.

d) $R\$46,00$. e) $R\$24,00$.

Resolução: Considerando que x é a quantidade do produto comprado, temos que, por semana, essa pessoa gasta $10x+6$. Após o aumento de 20%, o produto passou a custar:

$$20\% \text{ de } 10 = 0{,}2.10 = 2 \Rightarrow R\$10,00 + R\$2,00 = R\$12,00.$$

Como essa pessoa consegue comprar $(x-2)$ produtos após o aumento de 20%, levando a mesma a quantia, segue que:

$$12(x-2) = 10x+6 \Rightarrow 12x-24 = 10x+6 \Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15.$$

Logo, a quantia que a pessoa leva semanalmente para fazer a compra é:

$$10x+6 = 10.15+6 = 156 \text{ reais}.$$

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 154)

A expressão "Fórmula de Young"é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{Dose de criança} = \frac{idade\,da\,criança(em\,anos)}{idade\,da\,criança(em\,anos)+12}.\text{ dose adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento x a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar um dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a:

a) 15. b) 20. c) 30.

d) 36. e) 40.

Resolução: Para calcular a dosagem de medicamento a enfermeira usa a seguinte fórmula:

$$\text{Dose de criança} = \frac{idade\,da\,criança(em\,anos)}{idade\,da\,criança(em\,anos)+12}.\text{ dose de adulto}$$

No prontuário, a enfermeira verifica que horas antes foi ministrada uma dose de 14 mg, através dessa informação, concluímos que:E

$$14 = \frac{x}{x+12}.42, \text{ sendo que x é a idade da criança.}$$

$$14x + 14.12 = 42x \Rightarrow 28x = 14.12 \Rightarrow x = 6.$$

Logo, a criança tem 6 anos de idade. Assim temos:

$$\frac{6}{6+12}.60 = \frac{360}{18} = 20$$

Portanto, a enfermeira deverá ministrar uma dose de 20 mg do medicamento na criança.

Alternativa:B

(ENEM 2016 - Q. 155)

O setor de recursos humanos de uma empresa pretende fazer contratações para adequar-se ao artigo 93 da Lei n° 8.213/91, que dispõe:

Art. 93. A empresa com 100 (cem) ou mais empregados está obrigada a preencher de 2% (dois por cento) a 5%(cinco por cento) dos seus cargos com benefíciários reabilitados ou pessoas com deficiência, habilitadas, na seguinte proporção:

I. até 200 empregados.....................2%;
II. de 201 a 500 empregados...........3%;
III. de 501 a 1000 empregados........4%;
IV. de 1001 em diante.......................5%.

Disponível em:www.planalto.gov.br. Acesso em: 3 fev. 2015.

Constatou-se que a empresa possui 1 200 funcionários, dos quais 10 são reabilitados ou com deficiência, habilitados. Para adequar-se à referida lei, a empresa contratará apenas empregados que atendem ao perfil indicado no artigo 93. O número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados, que deverá ser contratado pela empresa é:

a) 74. b) 70. c) 64.

d) 60. e) 53.

Resolução: Seja x o número mínimo de empregados reabilitados ou com deficiência, habilitados (RDH), que deverá ser contratado pela empresa. Considerando que a empresa já possui 10 funcionários RDH e vai adequar-se à lei, segue que:

$$10 + x = 5\%.(1200 + x) \Rightarrow$$
$$10 + x = 0,05(1200 + x) \Rightarrow$$
$$10 + x = 60 + 0,05x \Rightarrow$$
$$0,95x = 50 \Rightarrow$$
$$x = \frac{50}{0,95} \Rightarrow$$
$$x \cong 52,6$$

Portanto, o número mínimo de empregados em questão é 53.
Alternativa: E

2.1.2 Equação do 2º grau

(ENEM 2010 - Q. 159)

Embora o Índice de Massa Corporal (IMC) seja amplamente utilizado, existem ainda inúmeras restrições teóricas ao uso e às faixas de normalidade preconizadas. O Recíproco do Índice Ponderal (RIP), de acordo com o modelo alométrico, possui uma melhor fundamentação matemática, já que a massa é uma variável de dimensões cúbicas e a altura, uma variável de dimensões lineares. As fórmulas que determinam esses índices são:

$$IMC = \frac{massa(kg)}{[altura(m)]^2} \quad RIP = \frac{altura(cm)}{\sqrt[3]{massa(kg)}}$$

ARAUJO, C. G. S.; RICARDO, D. R. Índice de Massa Corporal: **Um questinamento Científico Baseado em Evidências.** Arq. Bras. Cardiologia, volume 79, nº 1, 2002 (adaptado).

Se uma menina, com 64 kg de massa, apresenta IMC igual a $25kg/m^2$, então ela possui RIP igual a:

a) $0,4cm/kg^{\frac{1}{3}}$ b) $2,5cm/kg^{\frac{1}{3}}$ c) $8cm/kg^{\frac{1}{3}}$

d) $20cm/kg^{\frac{1}{3}}$ e) $40cm/kg^{\frac{1}{3}}$

Resolução: Seja h a altura da menina, em metros, então, a partir da fórmula do IMC, temos:

$$IMC = \frac{massa(kg)}{[altura(m)]^2} \Rightarrow 25 = \frac{64}{h^2} \Leftrightarrow h^2 = \frac{64}{25} \Rightarrow h = \frac{8}{5} \Rightarrow h = 1,6m = 160cm$$

Logo, o RIP é:

$$RIP = \frac{altura(cm)}{\sqrt[3]{massa(kg)}} = \frac{160}{4} = 40$$

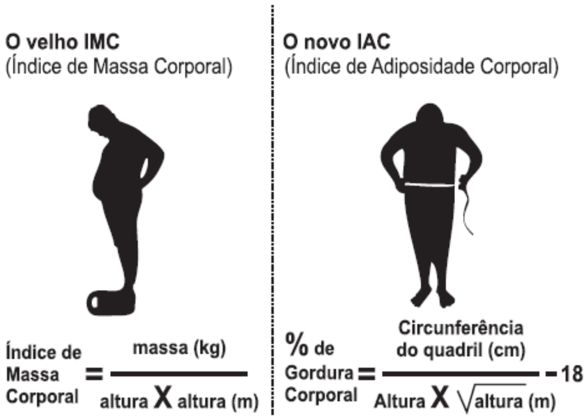
Portanto, uma menina de 64 kg, que apresenta IMC igual a $25kg/m^2$, possui RIP igual a 40.

Observação: Não consideramos $h = -\frac{8}{5}$, pois h representa uma medida.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 153)

O Índice de Massa Corporal (IMC) é largamente utilizado há cerca de 200 anos, mas esse cálculo representa muito mais a corpulência que a adiposidade, uma vez que indivíduos musculosos e obesos podem apresentar o mesmo IMC. Uma nova pesquisa aponta o Índice de Adiposidade Corporal (IAC) como uma alternativa mais fidedigna para quantificar a gordura corporal, utilizando a medida do quadril e a altura. A figura mostra como calcular essas medidas, sabendo-se que, em mulheres, a adisposidade normal está entre 19% e 26%.



Disponível em: http://www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 24 abr. 2011(adaptado).

Uma jovem com $IMC = 20kg/m^2$, 100 cm de circunferência dos quadris e 60 kg de massa corpórea resolveu averiguar seu IAC.Para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, a atitude adequada que essa jovem deve ter diante da nova medida é

(Use $\sqrt{3} = 1,7\%$ e $\sqrt{1,7} = 1,3$)

a) Reduzir seu excesso de gordura em cerca de 1%.

b) Reduzir seu excesso de gordura em cerca de 27%.

c) Manter seus níveis atuais de gordura.

d) Aumentar seu nível de gordura em cerca de 1%.

e) Aumentar seu nível de gordura em cerca de 27%.

Resolução: A jovem possui:

$$IMC = 20kg/m^2$$
Circ.do quadril =100 cm
Massa= 60 kg

Essas informações nos permitem calcular a altura dessa jovem, informação que será necessária para descobrirmos qual o seu IAC.

Sabemos que o IMC é calculado através da razão entre a massa da pessoa e o quadrado da altura. Portanto, temos:

$$IMC = \frac{massa(kg)}{h^2(cm)}$$

Substituindo os dados fornecidos na fórmula, obtemos:

$$20 = \frac{60}{h^2} \Rightarrow 20h^2 = 60 \Rightarrow h^2 = \frac{60}{20} \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow h = \sqrt{3} = 1,7 \Rightarrow h = 1,7$$

Observação: Note que não consideramos $h = -\sqrt{3}$ como solução da equação $h^2 = 3$, por h se tratar de uma medida.

Para descobrimos qual o valor da raíz quadrada de h, aplicaremos a raíz quadrada em ambos os lados. Assim, teremos:

$$\sqrt{h} = \sqrt{1,7} \Rightarrow \sqrt{h} = 1,3$$

Como já temos todas informaçãoes necessárias, agora iremos calcular o IAC.

De acordo com o exercício, o IAC(%) é dado por:

$$IAC(\%) = \frac{circ.doquadril(cm)}{altura.\sqrt{altura}} - 18$$

Então:

$$IAC(\%) = \frac{100}{1,7.1,3} - 18 \Rightarrow IAC(\%) = \frac{100}{2,21} - 18 \Rightarrow IAC(\%) = 45,24 - 18 \Rightarrow$$

$IAC(\%) = 27,25\%$

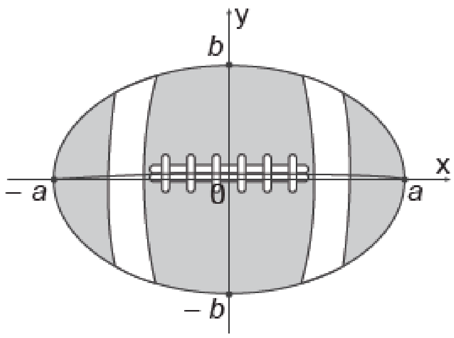
Portanto, para se enquadrar aos níveis de normalidade de gordura corporal, essa jovem deve reduzir seu IAC de 27,25% para qualquer valor entre 19% e 26% , ou seja,ela deve reduzir seu IAC em, pelo menos, 1,25 ponto percentual(cerca de 1%).

Alternativa: A

2.1.3 Introdução a função

(ENEM 2015 - Q. 137 - Lei de formação)

A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano, cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. Os valores a e b são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.



Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$. O volume dessa bola, em função apenas de b, é dado por:

a) $8b^3$.
b) $6b^3$.
c) $5b^3$.
d) $4b^3$.
e) $2b^3$.

Resolução: Temos que o comprimento horizontal é igual a 2a e o comprimento vertical é igual a 2b. E que a diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual a metade do comprimento vertical. Então, temos que:

$$2a - 2b = \frac{2b}{2} \Rightarrow$$
$$2a - 2b = b \Rightarrow$$
$$2a - 2b = b \Rightarrow$$
$$2a = b + 2b \Rightarrow$$
$$2a = 3b \Rightarrow$$
$$a = \frac{3b}{2}$$

De acordo com o enunciado, o volume aproximado dessa bola é: $V = 4ab^2$.
Substituindo o valor de *a* na fórmula do volume, obtemos:

$$V = 4ab^2 \Rightarrow$$
$$V = 4.\frac{3b}{2}.b^2 \Rightarrow$$
$$\frac{12b}{2}.b^2 \Rightarrow$$
$$V = 6b.b^2 \Rightarrow$$
$$V = 6b^3$$

Logo,temos que: $V = 6b^3$
Alternativa: B

(ENEM 2016 - Q. 137- Lei de formação)

Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é:

a) $\dfrac{500.81}{A.D^2}$.   b) $\dfrac{500.A}{D^2}$.   c) $\dfrac{500.D^2}{A}$.

d) $\dfrac{500.A.D^2}{81}$.   e) $\dfrac{500.3.D^2}{A}$.

Resolução: Sejam E, D, C, V e A, a espessura do material, a distância até a fonte sonora, o custo do material, o volume do material e a área da parede, respectivamente. Do enunciado, segue que:

• a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, ou seja: $E = \dfrac{a}{D^2}$ (1), sendo a, uma constante de proporcionalidade;

• o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento, ou seja: $C = b.V$ (2), sendo b, uma constante de proporcionalidade.

Como V = A.E, de (1) e (2), segue que:

$$C = b.V = b.A.E = b.A.E = b.A.\frac{a}{D^2} = \frac{A.a.B}{D^2} \text{ (3).}$$

Em (3), podemos considerar o produto entre as constantes a e b como sendo uma única constante, que representaremos por k. Assim, de (3), segue:

$$C = k.\frac{A}{D^2} \text{ (4)}$$

Já podemos considerar que, dentre as alternativas da questão, a única que satisfaz (4) é a apresentada na letra b, mas vamos verificar que k=500.

Dos dados do enunciado, temos que C=500, A=9 e D=3. Substituindo esses dados em (4), obtemos o valor da constante k:

$$500 = k.\frac{9}{3^2} \Rightarrow k = 500 \Rightarrow C = 500.\frac{A}{D^2}$$

Alternativa:B

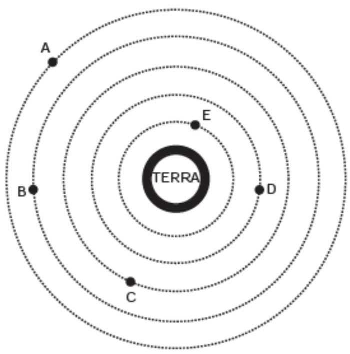
(ENEM 2013- Q. 138- Representação gráfica)

A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

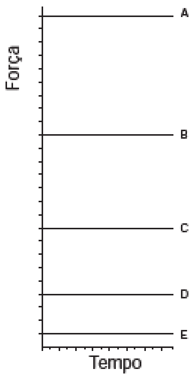
$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

onde $m_1 e m_2$ correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro.

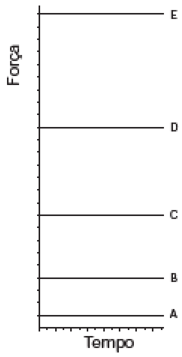
O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.



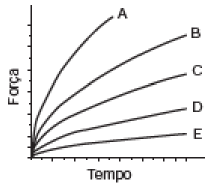
Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?



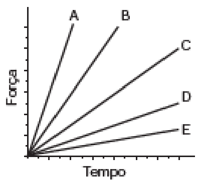
a)



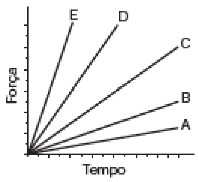
b)



c)



d)



e)

Resolução: Para a órbita circular, a distância d do satélite ao centro da Terra é constante e a força gravitacional terá intensidade constante e com o valor inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o planeta e o centro da Terra, ou seja, quanto maior a distância menor será a força. Assim:

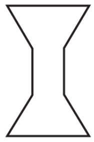
$$d_A > d_B > d_C > d_D > d_E \Rightarrow F_A < F_B < F_C < F_D < F_E.$$

Logo, o gráfico que expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo é o apresentado na letra B.

Alternativa: B

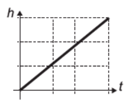
(ENEM 2014 - Q. 139- Representação gráfica)

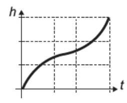
Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista de frontal dessa escultura.

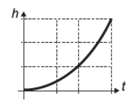


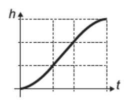
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

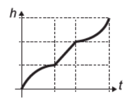
O gráfico que expressa a altura na escrutura em função do tempo (t) decorrido é:

a) 

b) 

c) 

d) 

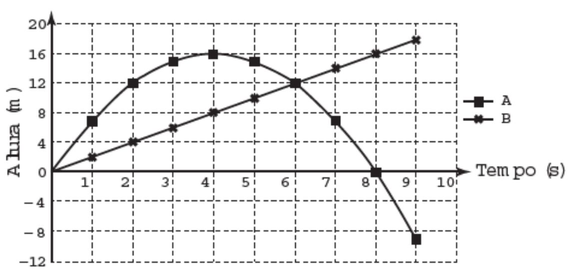
e) 

Resolução: Iniciamente vamos dividir a figura em 3 partes. No tronco de cone inferior, a taxa de crescimento da altura(h) em função do tempo(t) é crescente. No cilindro tal taxa é constante. Por fim, no tronco do cone superior da escultura, a taxa de crescimento da altura é descrecente. Portanto, o gráfico que melhor representa a altura(h) da água na escultura em função do tempo (t)decorrido é o da alternativa D.

2.1.4 Função do 1º grau

(ENEM 2016 - Q. 136- Coeficiente angular)

Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse al cançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente algular da reta que representa a trajetória de B deverá:

a) Diminuir em 2 unidades.

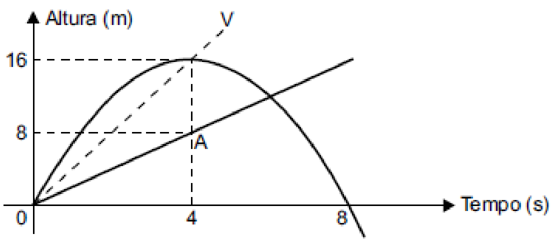
b) Diminuir em 4 unidades.

c) Aumentar em 2 unidades.

d) Aumentar em 4 unidades.

e) Aumentar em 8 unidades.

Resolução:



O coeficiente algular de uma reta é a tangente do seu ângulo de inclinação. Através dessa informação podemos encontrar o valor do coeficiente angular das retas.

O coeficiente da reta $OA(m_{OA})$ dada é:

$$m_{OA} = \frac{8-0}{4-0} = 2$$

O coeficiente angular da reta $OV(M_{OV})$, que passa no vértice da parábola, é

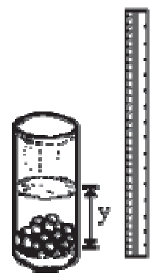
$$m_{OV} = \frac{16-0}{4-0} = 4$$

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta dada deverá aumentar $m_{OV} - m_{OA} = 4–2 = 2$ unidades.

Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 159- Lei de formação)

Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.



O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

a) $y = 30x$. b) $y = 25x + 20,2$. c) $y = 1,27x$.

d) $y = 0,7x$. e) $y = 0,07x + 6$.

Resolução: A partir dos dados apresentados no quadro, podemos concluir que o nível de água(y) em função do número de bolas(x) é do primeiro grau, então y= ax+b. Ainda de acordo com o quadro, temos:

$$6,35 = a.5 + b \ (1)$$
$$6,70 = a.10 + b \ (2)$$
$$7,05 = a.15 + b \ (3)$$

De (1), segue:

$$a.5 + b = 6,35 \Rightarrow$$
$$5a = 6,35 - b \Rightarrow$$
$$a = \frac{6,35 - b}{5} \ (4)$$

Substituindo (4) em (2), temos:

$$6,70 = \frac{6,35 - b}{5}.10 + b \Rightarrow$$
$$6,70 = (6,35 - b).2 + b \Rightarrow$$
$$6,70 = 12,70 - 2b + b \Rightarrow$$
$$6,70 = 12,70 - b \Rightarrow$$
$$b = 12,70 - 6,70 \Rightarrow$$
$$b = 6 \ (5)$$

Por fim, substituindo (5) em (1), segue:

$$6,70 = 10a + 6 \Rightarrow$$
$$6,70 - 6 = 10a \Rightarrow$$
$$10a = 0,70 \Rightarrow$$
$$a = \frac{0,70}{10} \Rightarrow$$
$$a = 0,07$$

Portanto, como a expressão é da forma y = ax+b, segue que: $y = 0,07x + 6$.
Alternativa:E

(ENEM 2011 - Q. 155- Lei de formação)

O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4 300 vagas no setor, totalizando 880 605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

a) $y = 4300x$ b) $y = 884905x$ c) $y = 872005 + 4300x$

d) $y = 876305 + 4300x$ e) $y = 880605 + 4300x$

Resolução: De acordo com o enunciado, fevereiro teve um total de 880 605 trabalhadores com carteira assinada, e esse valor expressa um aumento de 4.300 vagas em relação a janeiro, desta forma, em janeiro, o número de trabalhadores com carteira assinada é dado por:

$$880605 - 4300 = 876305$$

A relação entre o número de trabalhadores e os meses é uma função do 1º grau, pois o enunciado supõe que o incentivo seja o mesmo nos seis primeiros meses. Logo, temos:

$$y = ax + b$$
$$(x_1, y_1) = (1, 876305)$$
$$(x_2, y_2) = (2, 880605)$$

Portanto, o coeficiente angular da reta é :

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{880605 - 876305}{2 - 1} \Rightarrow a = \frac{4300}{1} \Rightarrow a = 4300$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = 4300x + b$$

Para determinar o coeficiente linear da reta substitui-se um ponto. Consideremos então, o ponto (2,880605) que representa, respecitivamente, o mês 2 e a quantidade de trabalhadores desse mês.

$$x_2 = 2 \Leftrightarrow y_2 = 880605 \Rightarrow y = 4300x + b \Rightarrow$$
$$880605 = 4300.2 + b \Rightarrow$$

$$880605 = 8600 + b \Rightarrow$$
$$880605 - 8600 = b \Rightarrow$$
$$b = 872005$$
$$y = 4300x + b \Rightarrow y = 4300x + 872005$$

Sendo assim, a relação entre y e x é dada por: y = 872.005 + 4.300x.
Alternativa: C

Progressões Aritméticas

Essa é uma questão que também pode ser trabalhada no contexto de Progessões aritméticas(PA). Vejamos uma possível solução nesse contexto:

O inccremento, constante nos seis primeiros meses, pode ser considerado como a razaão de uma PA com primeiro termo igual à diferença entre o número de trabalhadores entre fevereiro e janeiro, ou seja:

$$a_1 = 880605 - 4300 = 876305$$

O termo geral da PA pode ser entendido como y, que é uma variável que depende da quantidade de meses(n), que podemos nindicar por x, ou seja, nesse caso, podemos reescrever a fórmula do termo geral da PA, $a_n = a_1 + (nn - 1)r$, como sendo:

$$y = 876305 + (x - 1)4300$$

Logo:

$$y = 876305 + (x - 1)4300 \Rightarrow y = 876305 + 4300x - 4300 \Rightarrow y = 872005 + 4300x$$

(ENEM 2011 - Q. 160- Lei de formação e Igualdade)

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100 000,00 por km construído(n),acrescidos de um valor fixo de R$ 120 000,00 por km construído (n) acrescido de um valor fixo de R$ 150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada.

Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

a) 100n + 350 = 120n + 150

b) 100n + 150 = 120n + 350

c) 100(n + 350)= 120(n + 150)

d) 100(n + 350 000) = 120(n + 150 000)

e) 350 (n + 100 000)= 150(n + 120 000)

Resolução: De acordo com o enunciado a primeira empresa cobrou R$ 100 000,00 por km construído (n), e mais um valor fixo de R$ 350 000,00. Então temos que o custo (C_1), pode ser representado por:

$$C_1 = 100000n + 350000$$

A segunda empresa cobrou R$ 120 000,00 por km contruído (n), acrescido de um valor fixo de R$ 150 000,00. Logo:

$$C_2 = 120000n + 150000$$

Do ponto de vista econômico, a extensão ser indiferente para a prefeitura significa que o custo será igual nas duas empresas, ou seja:

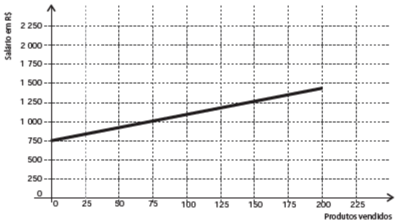
$$C_1 = C_2 \Rightarrow$$
$$100000n + 350000 = 120000n + 150000 \Rightarrow$$
$$100n + 350 = 120n + 150$$

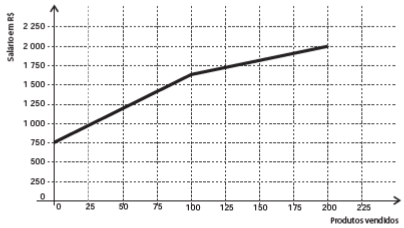
Alternativa: A

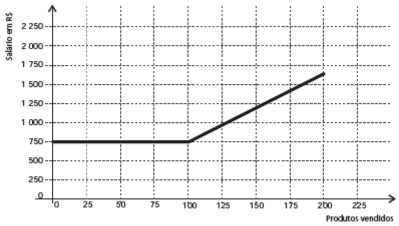
(ENEM 2012 - Q. 145 - Lei de formação e representação gráfica)

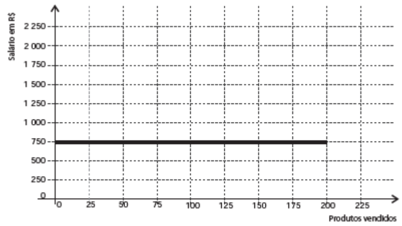
Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 750,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

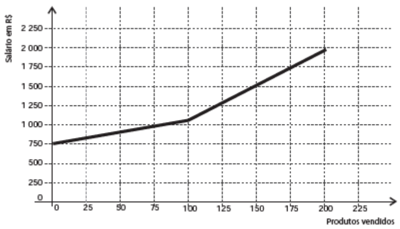
Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: O salário S é função de x, para:

$$1) 0 \leq x \leq 100, \text{ S é dado por: } S = 750 + 3x$$
$$2) x \geq 101, \text{ S é dado por: } S = 1050 + 9.(x - 100) = 1050 + 9x - 900 = 9x + 150$$

Portanto, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é o apresentado na alternativa A.

Alternativa: A

(ENEM 2010 - Q. 150 - Lei de formação e valor númerico)

A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais. Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares $(25cmx50cm)$. Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares $(50cmx100cm)$. O valor da segunda encomenda será

a) O dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

b) Maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

c) A metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

d) Menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

e) Igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

Resolução: Sejam: mq, o valor de 1 metro quadrado de tela, ou seja, mq=$R\$20,00$; ml, o valor de 1 metro linear de moldura, ou seja, ml=R\$15,00; T, taxa fixa de entrega, ou seja, T=$R\$10,00$.

Convertendo as medidas em centímetros para metros, temos:

25 cm = 0,25 m
50 cm = 0,50 m
100 cm = 1,00 m

Podemos representar o preço de um quadro por: $P = m_q.20 + 2.m_l.15$ Logo, o valor de um quadro da 1ª compra é:

$$P_1 = (0,25.0,50).20 + 2.(0,25.0,50).15 \Rightarrow$$
$$P_1 = (0,125).20 + 2(0,125).15 \Rightarrow$$
$$P_1 = 2,5 + (0,25).15 \Rightarrow$$
$$P_1 = 2,15 + 22,5 = 25$$

Incluindo a taxa de entrega, temos que o valor, em reais, da primeira encomenda será:

$$V_1 = 8.C_1 + T \Rightarrow V_1 = 8(25) + 10 = 210$$

O preço do quadro da 2ª compra é:

$$P_2 = (0,50.1,00)20 + 2(0,50.1,00)15 \Rightarrow$$
$$P_2 = (0,50)20 + 2(1,50)15 = 55$$

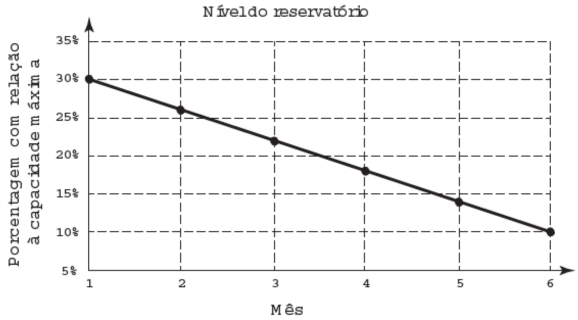
O valor da segunda encomenda, em reais, incluindo a taxa de entrega é:

$$V_2 = 8C_2 + T \Rightarrow$$
$$V_2 = 8(55) + 10 = 450$$

Assim, $V_2 > V_1$.
Alternativa: B

(ENEM 2016 - Q. 143 - Lei de formação)

Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio. b) 3 meses e meio. c) 1 mês e meio.

d) 4 meses. e) 1 mês.

Resolução: Seja y = ax + b a equação da reta que representa a porcentagem da capacidade máxima do reservatório, ocupado por água, sendo x o tempo (em meses) e y a porcentagem em relação à capacidade máxima.
Como os pontos (1; 30) e (6; 10) pertencem à reta, temos:

$$\begin{cases} 30 = a.1 + b(1) \\ 10 = a.6 + b(2) \end{cases}$$

Isolando b em (1) e substituindo em (2) , temos:

$$10 = 6a + 30 - a \Rightarrow -20 = 5a \Rightarrow a = -4$$

Substituindo a=-4 em (1) (ou em (2)), temos:

$$30 = -4 + b \Rightarrow b = 34$$

Logo, $y = -4x + 34$.
Para y = 0, temos:

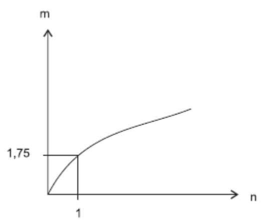
$$-4x + 34 = 0 \Rightarrow x = 8,5$$

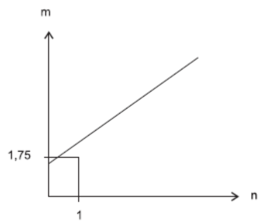
Assim, em meses, o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o seu nível zero é 8,5 – 6,0 = 2,5.
Alternativa: A

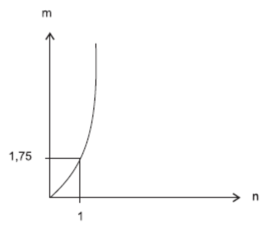
(ENEM 2011 - Q. 151- Representação gráfica)

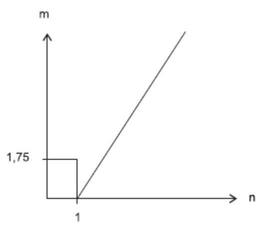
As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa $R\$1,75$ o quilograma.

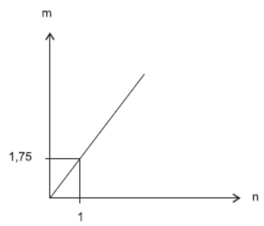
Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: O preço m pago, em reais, pela compra de n quilogramas desse produto é $m = 1{,}75\ n$. Portanto, temos a função: $f : R_+ \Rightarrow R,\ f(m) = 1,75n$.

O gráfico desta função é uma semirreta que inicia no ponto (0, 0), a origem do plano cartesiano.

Dos gráficos apresentados, apenas o último apresenta estas características, satisfazendo a lei:

$f = R_+ \Rightarrow R, f(m) = 1,75n.$

Conforme este gráfico, para n = 0, temos m = 0:

$$m = 1,75.0 \Rightarrow m = 0.$$

E para n = 1, temos m = 1,75:

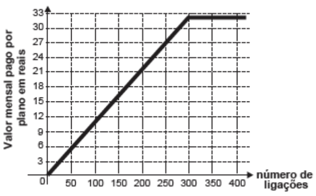
$$m = 1,75.1 \Rightarrow m = 1,75.$$

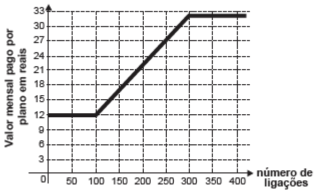
Alternativa: E

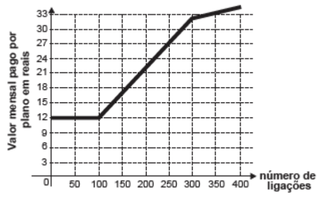
(ENEM 2015 - Q. 138 - Lei de formação e representação gráfica)

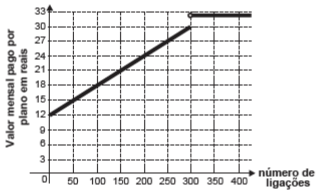
Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligações, a partir da 101 ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

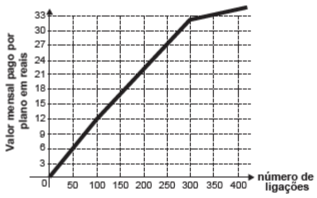
Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: Sendo *x* o número de ligações e *f(x)* o valor cobrado, em reais, de acordo com os dados apresentados no enunciado, temos:

$$f(x) = \begin{cases} 12, \text{ se } 0 < x \le 100 \\ 12 + (x - 100).0,10, \text{ se } 100 < x \le 300 \\ 32, \text{ se } 300 < x \le 500 \end{cases}$$

Logo, o gráfico que melhor representa a relação mensal paga nesse plano e o número de ligação feitas é o da alternativa B.

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 155- Igualdade)

As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$$Q_O = -20 + 4P$$
$$Q_D = 46 - 2P$$

em que Q_O é quantidade de oferta, Q_Dé a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando Q_O e Q_D se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

a) 5 b) 11 c) 13

d) 23 e) 33

Resolução: O preço de equilibrio no mercado é encontrado quando se iguala as duas equações, ou seja:

$$Q_O = Q_D \Rightarrow$$
$$-20 + 4p = 46 - 2p \Rightarrow$$
$$6p = 46 + 20 \Rightarrow$$
$$6p = 66 \Rightarrow$$

$$p = \frac{66}{6} \Rightarrow$$
$$p = 11$$

Portanto, o preço de equilibrio é 11.
Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 155 - Inequação do 1° grau)

Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo.

Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

a) 476. b) 675. c) 923.

d) 965. e) 1 538.

Resolução: Seja x o número de folhetos do tipo 1. Para o envio de x folhetos do primeiro tipo e 500 folhetos do segundo tipo, gastou-se , em reais:

$$x.0,65 + 500(0,65 + 0,60 + 0,20)$$

Para que x seja o máximo possível a fim de que a verba de R$ 1000,00 seja suficiente, tem-se:

$$x.0,65 + 500(0,65 + 0,60 + 0,20) \leq 1000 \Rightarrow$$
$$0,65x + 725 \leq 1000 \Rightarrow$$
$$0,65x \leq 1000 - 725 \Rightarrow$$
$$0,65x \leq 275 \Rightarrow$$
$$x \leq \frac{275}{0,65} \Rightarrow x \cong 423,07$$

Portanto, x = 423, ou seja, o total de selos de R$ 0,65 do tipo 1 é 423. Logo, o total de selos de R$ 0,65 comprados foi: 500+423=923
Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 179- Estudo de sinal)

Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por CT, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por FT. O lucro total(LT) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $LT(q) = FT(q) - CT(q)$.

Considerando-se as funções FT(q) = 5q e CT(q) = 2q + 12 como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo?

a) 0. b) 1. c) 3.
d) 4. e) 5.

Resolução: De acordo com o enunciado, o faturamento é dado por $FT(q) = 5q$, o custo por $CT(q) = 2q + 12$, e o lucro total é obtido através da sequinte equação: $LT(q) = FT(q) - CT(q)$. Substituindo os dados, temos:

$$LT(q) = FT(q) - CT(q) \Rightarrow$$
$$LT(q) = 5q - (2q + 12) = 3q - 12 \Rightarrow$$

Para não ter prejuízo, o lucro deve ser maior ou igual a 0. Portanto, temos:

$$LT(q) \geq 0 \Rightarrow 3q - 12 \geq 0 \Leftrightarrow q \geq 4$$

Como $q \geq 4$, a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo é 4.
Alternativa: D

2.1.5 Função do 2º grau

(ENEM 2009 - Q. 156 - Lei de formação)

Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

a) $V = 10.000 + 50x–x^2$.
b) $V = 10.000 + 50x + x^2$.
c) $V = 15.000–50x–x^2$.
d) $V = 15.000 + 50x–x^2$.
e) $V = 15.000 - 50x - x^2$.

Resolução: O valor a ser arrecado por dia, em reais, é calculado através do produto entre a quantidade vendida (Q), em litros, e o preço do litro (P), em reais. Essas duas variáveis são funções do valor de desconto x, em centavos. A venda é de 10.000 litros por dia ao preço de 1,50 real/litro. A cada centavo de desconto, a quantidade vendida aumentava em 100 litros, portanto, temos que:

$$Q = 10.000 + 100x$$
$$P = 1,50 - 0,01x$$

Como V = Q.P, temos que:

$$V = (10.000 + 100x).(1,50 - 0,01x) \Rightarrow$$

$$V = 15.000 + 150x–100x–x^2 \Rightarrow$$
$$V = 15.000 + 50x–x^2.$$

Logo, a expressão que relaciona V e x é: $V = 15000 + 50x - x^2$
Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 164- Lei de formação)

Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas X da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

•A nota zero permanece zero.
•A nota 10 permanece 10.
•A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é

a) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$ b) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x.$ c) $y = -\frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x.$

d) $y = \frac{4}{5}x + 2.$ e) y = x.

Resolução: Como a função f tem grau menor que 3, podemos supor que $f(x) = ax^2 + bx + c$, a , b, c e ℝ. Temos:

Para f(0) = 0 : c= 0

Para$f(10) = 10 : 100a + 10b + c = 10 \Rightarrow 100a + 10b = 10$, já que $c = 0$.

Para f(5)= 6 : 25a +5b = 6

Portanto, temos:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 10 \\ 25a + 5b = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 50a + 5b = 5(1) \\ 25a + 5b = 6(2) \end{cases}$$

Fazendo (1) -(2), segue que:

$$25a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{25}\ (3)$$

Substituindo(3) em (1), temos:

$$50(\frac{-1}{25}) + 5b = 5 \Rightarrow$$
$$-2 + 5b = 5 \Rightarrow b = \frac{7}{5}$$

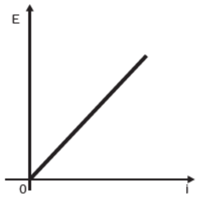
Logo, a expressão da função utilizada pelo professor é $f(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x.$

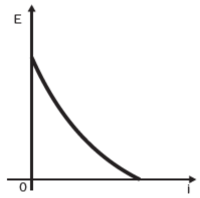
Alternativa: A

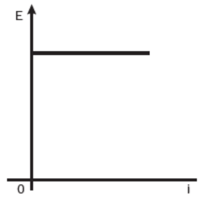
(ENEM 2012 - Q. 179 - Representação gráfica)

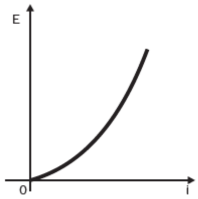
Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

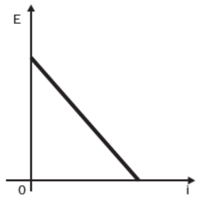
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

a) 

b) 

c) 

d) 

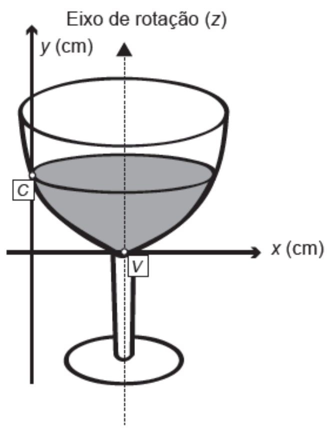
e) 

Resolução:Como a energia (E) é diretamente proporcional à potência e a potência é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de corrente (i), segue que a energia também é diretamente proporcional ao quadrado da intensidade de corrente, ou seja, aumentando a energia aumenta a intensidade da corrente – a relação entre E e i é uma função crescente. Como a proporcionalidade ocorre entre E e o quadrado de i, segue que a função é do segundo grau. Logo, o gráfico que representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele da função quadrática é o da alternativa D.

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 136 - Análise gráfica e zeros)

A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x. Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

a) 1.

b) 2.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Resolução: A função apresenta apenas uma raíz real, pois a parábola intercepta o eixo x em apenas um ponto. Então, temos que o $\Delta = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4a.c \Rightarrow$$
$$0 = 6^2 - 4.\tfrac{3}{2}.c \Rightarrow$$
$$36 - 6c = 0 \Rightarrow$$
$$6c = 36 \Rightarrow$$
$$c = 6$$

Portanto, a altura do líquido contido na taça é 6 cm.
Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 152- Parâmetro *c* e zeros)

Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

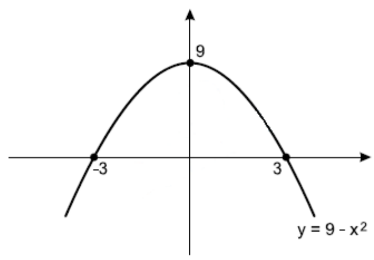
$$y = 9 - x^2 \text{ , sendo } x \text{ e } y \text{ medidos em metros.}$$

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a 23 da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.
Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

a) 18. b) 20. c) 36.

d) 45. e) 54.

Resolução: Vamos buscar pela interseção da parábola com os eixos:
*Interseção com o eixo *x*, ou seja, y= 0:
$0 = 9 - x^2 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
* Interseção com o eixo y, ou seja, x=0:
$y = 9 - 0 \Rightarrow y = 9$
Portanto, temos:



Com base no dados fornecidos, a área sob uma parábola como esta é igual $\frac{2}{3}$ da área do triângulo cujas dimensões são iguais à base e a altura da entrada do túnel, respectivamente. Logo, temos que a área da parte frontal da tampa de concreto é:

$$A = \frac{2}{3}.base.altura \Rightarrow$$
$$A = \frac{2}{3}.6.9 \Rightarrow$$
$$A = 36m$$

Alternativa: C

(ENEM 2015 - Q. 136 - Valor máximo ou mínimo)

Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como:

a) muito baixa.
b) baixa.
c) média.
d) alta.
e) muito alta.

Resolução: Quando o h é o maior possível, o T é o maior possível também. Assim, basta acharmos o vértice desta parábola. Neste caso, nossa intenção, é determinarmos o T do vértice, logo temos:

$$Y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow$$
$$Y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow$$
$$Y_v = -\frac{22^2 - 4.(-1).(-85)}{4.(-1)} \Rightarrow$$
$$Y_v = -\frac{484 - 340}{-4} \Rightarrow$$
$$Y_v = 36$$

Portanto, a temperatura no interior da estufa classifica-se como alta.
Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 165 - Valor Númerico)

A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 ºC.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0. b) 19,8. c) 20,0.

d) 38,0. e) 39,0.

Resolução: De acordo com o enunciado, a trava do forno só é liberada quando a temperatura do forno for no mínimo, 39° C o menor tempo de espera será o tempo para que a temperatura chegue aos 39°C após o desligamento, isto é, o valor de t que satisfaça a equação T(t)= 39. Resolvendo , tem-se que:

$$39 = -\frac{t^2}{4} + 400 \Rightarrow$$
$$\frac{t^2}{4} = 400 - 39 \Rightarrow$$
$$\frac{t^2}{4} = 361 \Rightarrow t^2 = 361.4 \Rightarrow$$
$$t^2 = 1444 \Rightarrow$$
$$t = \pm\sqrt{1444} \Rightarrow t = \pm 38 \Rightarrow t = 38$$

Portanto, o tempo mínimo de espera é 38 minutos.
Alternativa: D

(ENEM 2015 - Q. 157- Valor numérico)

Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, $R\$300,00$. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400–100p,$$

na qual q representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e p, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço p, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo:

a) $R\$0,50 \le p < R\$2,50$

b) $R\$1,50 \le p < R\$2,50$

c) $R\$2,50 \le p < R\$3,50$

d) $R\$3,50 \le p < R\$4,50$

e) $R\$4,50 \le p < R\$5,50$

Resolução: A arrecadação média *f(p)*, é função do preço p e da quantidade de pães vendidas q, dada por:

$$f(p) = qp$$
$$f(p) = (400 - 100p)p \Rightarrow$$
$$f(p) = 400p - 100p^2$$

Como o gerente não deseja que a média de arrecadação diminua, devemos ter:

$$f(p) \geq 300 \Rightarrow$$
$$400p - 100p^2 \geq 300 \Rightarrow$$
$$-100p^2 + 400p - 300 \geq 0 \Rightarrow$$
$$-p + 4p - 3 \geq 0$$

As raízes da equação $-p + 4p - 3 = 0$ são:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4.(-1).(-3) = 16 - 12 = 4$$
$$p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow$$
$$\frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-4 \pm 2}{-2} \Rightarrow p_1 = 1 \text{ e } p_2 = 3$$

O preço atual é de R$ 3,00, pois $\dfrac{R\$300,00}{100} = R\$3,00$.

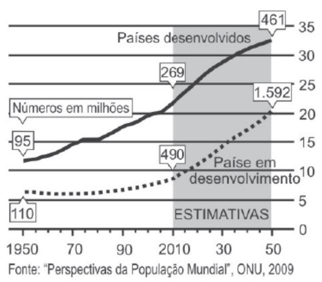
Para manter a recadação, o preço deverá ser baixado para R$ 1,00 (R$ 0,50 < R$ 1,00 R$1,50).

Alternativa: A

2.1.6 Função exponencial

(ENEM 2009 - Q. 137 - Valor numérico)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que x = 0 corresponde ao ano 2000, x = 1 corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

a) 490 e 510 milhões.
b) 550 e 620 milhões.
c) 780 e 800 milhões.
d) 810 e 860 milhões.
e) 870 e 910 milhões.

Resolução: O modelo exponencial $y = 363e^{0,003x}$ relaciona a população (y), em milhões de habitantes no ano (x), sendo que x=0 corresponde ao ano de 2000, x=1 ao ano de 2001, e assim por diante.Queremos estimar a população (y) com 60 anos ou mais no ano de 2030. Neste caso, devemos ter x=30. Substituindo o valor de x= 30, encontra-se:

$$Y = 363.e^{0,03.30} \Rightarrow$$
$$Y = 363.(e^{0,3})^3 \Rightarrow$$
$$Y = 363(1,35)^3 \cong 893$$

Portanto, estima-se que a população com 60 anos ou mais, em 2030, seja de aproximadamente 893 milhões de pessoas.
Alternativa: E

2.1.7 **Função Logarítmica**

(ENEM 2011 - Q. 139 - Valor numérico)

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w, introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substitui a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica.M_w e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina·cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995,foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes.
Disponível em: http: //earthquake,usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)
U.S. GEOLOGICAL SURVEY.**USGS Earthquake Magnitude Policy.** Disponível em: http: //earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado)

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe(em dina.cm)?

a) $10^{-5,10}$. b) $10^{-0,73}$. c) $10^{12,00}$.

d) $10^{21,65}$. e) $10^{27,00}$.

Resolução: De acordo com o enunciado, $M_w = -10,7 + \frac{2}{3}.log_{10}(M_0)$ e $M_w = 7,3$, então:

$$7,3 + 10,7 = \frac{2}{3}log_{10}(M_0) \Rightarrow 18 = \frac{2}{3}log_{10}(M_0) \Rightarrow 2log_{10}(M_0) = 54 \Rightarrow$$
$$log_{10}(M_0) = 27 \Rightarrow M_0 = 10_{27}$$

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 174- Valor númerico)

Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador tsunami no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}log.\frac{E}{E_0}$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$. b) $E_1 = 10^2.E_2$. c) $E_1 = 10^3.E_2$.

d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}}.E_2$. e) $E_1 = \frac{9}{7}.E_2$.

Resolução: Considerando os dados do terremoto ocorrido no Japão, $m = 9$ e $E = E_1$, temos:

$$\frac{2}{3}log\frac{E_1}{E_0} = 9 \Rightarrow 2log\frac{E_1}{E_0} = 27 \Rightarrow$$

$$log\frac{E_1}{E_0} = \frac{27}{2} \Rightarrow logE_1 - logE_0 = \frac{27}{2} \Rightarrow$$

$$logE_1 - \frac{27}{2} = logE_0 \ (1)$$

Do terremoto ocorrido na China, $M = 7$ e $E = E_2$, segue:

$$\frac{2}{3}log\frac{E_2}{E_0} = 7 \Rightarrow 2log\frac{E_2}{E_0} = 21 \Rightarrow log\frac{E_2}{E_0} = \frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$logE_2 - logE_0 = \frac{21}{2} \Rightarrow$$

$$logE_2 - \frac{21}{2} = logE_2 \text{ (2)}$$

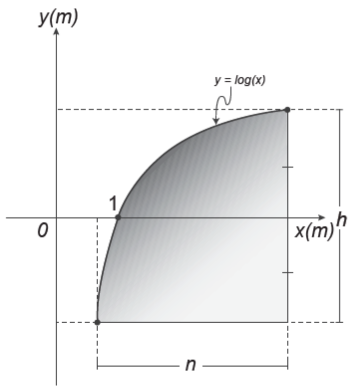
De (1) e (2), temos:

$$logE_1 - \frac{27}{2} = logE_2 - \frac{21}{2} \Rightarrow logE_1 - logE_2 = \frac{27}{2} - \frac{21}{2} \Rightarrow log\frac{E_1}{E_2} = 3 \Rightarrow$$
$$\frac{E_1}{E_2} = 10^3 \Rightarrow E_1 = 10^3.E_2$$

Alternativa: C

(ENEM 2015 - Q. 165 - Lei de formação e análise gráfica)

Um engenheiro projetou um automóvel cujos vidros das portas dianteiras foram desenhados de forma que suas bordas superiores fossem representadas pela curva de equação y= log(x), conforme a figura.



A forma do vidro foi concebida de modo que o eixo x sempre divida ao meio a altura h do vidro e a base do vidro seja paralela ao eixo x. Obedecendo a essas condições, o engenheiro determinou uma expressão que fornece a altura h do vidro em função da medida n de sua base, em metros.

A expressão algébrica que determina a altura do vidro é:

a) $log(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}) - log(\frac{n-\sqrt{n^2+4}}{2})$.

b) $log(1+\frac{n}{2}) - log(1-\frac{n}{2})$.

c) $log(1+\frac{n}{2}) + log(1-\frac{n}{2})$.

d) $log(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2})$.

e) $2log(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2})$.

Resolução: Consideremos as coordenadas dos pontos A e B, indicados na figura abaixo, obtidas a partir dos dados do enunciado: $A = (k, \frac{-h}{2})$ e $B = (k+n, \frac{h}{2})$.

Como A e B pertecem à curva $y = log(x)$, segue que:

$$*logk = \frac{-h}{2} \Rightarrow -h = 2log(k) \Rightarrow k = -2log(k)\ (1)$$
$$*log(k+n) = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2log(k+n)\ (2)$$

De (1) e (2), resulta:

$$2log(k+n) = -2logk \Rightarrow$$
$$log(k+n) = -logk \Rightarrow$$
$$log(k+n) + logk = 0$$
$$log[(k+n).k] = 0 \Rightarrow$$
$$(k+n).k = 10^0 \Rightarrow$$
$$k^2 + kn = 1$$
$$k^2 + kn - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$k = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+4}}{2} \Rightarrow$$

$$k = \frac{-n + \sqrt{n^2+4}}{2}, \text{ pois k} > 0.\ (3)$$

De (2) e (3), segue:

$$h = 2log(k+n) = 2log(\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2} + n) = 2log(\frac{-n+\sqrt{n^2+4}}{2} + 2n) =$$
$$2log(\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2}).$$

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 162 - Função exponencial e logaritmo)

Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A.(2,7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $log_{10}2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27.

b) 36.

c) 50.

d) 54.

e) 100.

Resolução: Considerando 0,3 como aproximação para $log_{10}2$, obtemos:

$$log_{10}2 = 0,3 \Rightarrow 10^{0,3} = 2\ (1)$$

Como a meia-vida do césio-137 é 30 anos, segue que:

$$M(30) = \frac{A}{2} \Rightarrow A.(2,7)^{k.30} = \frac{A}{2} \Rightarrow (2,7)^{30k} = \frac{1}{2} \Rightarrow (2,7)^{30k} = 2^{-1}\ (2)$$

De (1) e (2), segue: $(2,7)^{30k} = (10^{0,3})^{-1} \Rightarrow 2,7^{30k} = 10^{-0,3}$ (3)

Vamos, agora, calcular o tempo (t) para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial(A):

$$M(t) = \tfrac{10}{100}.A \Rightarrow A.(2,7)^{kt} = \tfrac{1}{10}.A \Rightarrow (2,7)^{kt} = \tfrac{1}{10}.A \Rightarrow$$

$$[(2,7)^{kt}]^{30} = (\tfrac{1}{10})^{30} \Rightarrow (2,7^{30k})^{t} = 10^{-30} \text{ (4)}$$

De (3) e (4), obtemos o tempo t:

$$(10^{-0,3})^{t} = 10^{-30} \Rightarrow 10^{-0,3t} = 10^{-30} \Rightarrow$$

$$-0,3t = -30 \Rightarrow t = \frac{-30}{-0,3} \Rightarrow t = 100.$$

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 145 - Função exponencial e logaritmo)

Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3 000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min.

Use 0,477 como aproximação para $log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de:

a) 22.
b) 50.
c) 100.
d) 200.
e) 400.

Resolução: A temperatura T é função do tempo e diminui 1% (0,01) a cada 30 min. Seja t a quantidade de vezes que a temperatura inicial será multiplicada por 0,99, o que ocorre a cada 30 min. Então, temos:

$$T(t) = 3000.(0,99)^{t}$$

Para que a temperatura atinja 30°C,devemos ter $T(t) = 30$, ou seja:

$$\begin{aligned} 3000.(0,99)^{t} &= 30 \Rightarrow \\ 0,99^{t} &= \frac{30}{3000} \Rightarrow \\ 0,99^{t} &= \frac{1}{100} \Rightarrow \\ 0,99^{t} &= 10^{-2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$log0,99^{t} = log10^{-2} \Rightarrow$$

$$t.log0,99 = -2 \text{ (1)}$$

Vamos desenvolver $log0,99$:

$$log0,99 = log\frac{99}{100} = log\frac{3^2.11}{10^2} = log3^2 + log11 - log10^2 \Rightarrow$$

$$= 2.log3 + log11 - 2.log10 = 2.0,477 + 1,041 - 2.1 = -0,005 \text{ (2)}$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$t.(-0,005) = 2 \Rightarrow t = \frac{-2}{-0,005} \Rightarrow t = 400.$$

Logo, são necessárias 400 meias horas, ou seja, 200 horas.

Progressão Geométrica:

Essa é uma questão que pode ser trabalhada no contexto de Progressão Geométricas (PG). Vejamos uma possível solução nesse contexto.

Diminuir $1\%(0,01)$ a cada 30 min significa que a temperatura é multiplicada po 0,99 a cada 30 min. Então o exercício aborda uma PG de razão(q) igual a 0,99.

No tempo t_0, a temperatura T_0 é 3000°C. No tempo t_1, a temperatura é $T_1 = 3000.0,99$

Como o termo geral de uma PG de razão q e primeiro termo a_1 é dado por $a_n = a_1.q^{n-1}$, temos:

$$T(t_a) = T_1.q^{t-1} \Rightarrow T(t_a) = 3000.0,99.099^{t_a-1} \Rightarrow T t_a = 3000.0,99^{t_a};\ t\epsilon\mathbb{N}, t \leq 1.$$

Para determinarmos o tempo t é necessário para que a liga atinja 30°C, devemos considerar T(t)= 30°C:

$$\begin{gathered} T(t) = 3000.0,99^t \Rightarrow \\ 3000.0,99^t = 30 \\ 0,99^t = \frac{30}{3000} \Rightarrow \\ 0,99^t = \frac{1}{100} \Rightarrow \\ 0,99^t = 10^{-2} \Rightarrow \\ log0,99^t = log10^{-2} \Rightarrow \\ t.log0,99 = -2\ (1) \end{gathered}$$

Vamos desenvolver $log0,99$:

$$log0,99 = log\frac{99}{100} = log\frac{3^2.11}{10^2} = log3^2 + log11 - log10^2 =$$

$$= 2.log3 + log11 - 2.log10 = 2.0,477 + 1,041 - 2.1 = -0,005\ (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$t.(-0,005) = 2 \Rightarrow t = \frac{-2}{-0,005} \Rightarrow t = 400.$$

Logo, são necessárias 400 meias horas, ou seja, 200 horas.

Alternativa: D

	1º bimestre	2º bimestre	3º bimestre	4º bimestre
Matemática	5,9	6,2	4,5	5,5
Português	6,6	7,1	6,5	8,4
Geografia	8,6	6,8	7,8	9,0
História	6,2	5,6	5,9	7,7

2.2 Matrizes

(ENEM 2012 - Q. 178 - Multiplicação de matrizes)

Um aluno registrou as notas bimestrais de algumas de suas disciplinas numa tabela. Ele observou que as entradas numéricas da tabela formavam uma matriz 4x4, e que poderia calcular as médias anuais dessas disciplinas usando produto de matrizes. Todas as provas possuíam o mesmo peso, e a tabela que ele conseguiu é mostrada a seguir:

Para obter essas médias, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela por:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Resolução: Para calcular a média aritmética de quatro notas, devemos somar as quatro notas e dividi a soma obtida por 4, ou multiplicar cada nota por $\frac{1}{4}$ e somar os resultados.

Para obter as médias, na matriz 4x4 obtida pelas notas deve ser multiplicada por uma matriz coluna 4x1, no qual cada um dos quatro elementos é igual a $\frac{1}{4}$.

Portanto, ele multiplicou a matriz obtida a partir da tabela pela matriz da alternativa E.

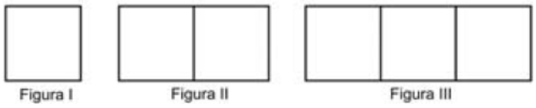
Alternativa: E

2.3 Sequências

2.3.1 Progressão Aritmética (PA)

(ENEM 2010 - Q. 149)

Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A



quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) $C = 4Q$. b) $C = 3Q + 1$. c) $C = 4Q - 1$.

d) $C = Q + 3$. e) $C = 4Q - 2$.

Resolução: Através da figura, podemos notar que para a contrução do primeiro quadrado foram gastos 4 canudos, no segundo, 7 canudos, e no terceiro foram gastos, 10 canudos. Essa sequência representa a progressão aritmética (4, 7, 10, ...) que fornece a quantidade (C) de canudos de acordo com os seus termos, esta progressão possui razão (r) igual a 3 e o primeiro termo igual a 4. Utilizando tais dados na fórmula do termo geral da $P.A. = a_1 + r(n-1)$, obtemos:

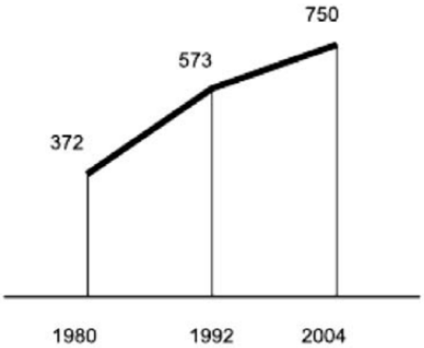
$$C = 4 + 3(n-1)$$

Logo, $C = 4 + 3n - 3 \Rightarrow 3n + 1$

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 166)

O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



Favela Tem Memória. **Época**. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado).

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 é 968, então o número de favelas em 2016 será:

a) Menor que 1150.

b) 218 unidades maior que em 2004.

c) Maior que 1 150 e menor que 1200.

d) 177 unidades maior que em 2010.

e) Maior que 1 200.

Resolução: Em 2004 são 750 favelas e em 2010 são 968, o que indica um aumento de 218 favelas no período de 6 anos. Considerando que o padrão na variação do período 2004/2010 se manterá nos próximos 6 anos, haverão, em 2016, $(968+218) = 1186$ favelas. Identificamos uma PA entre os anos 2004 a 2016 com intervalos de 6 anos e variação (linear) de 218: 750, 968, 1186.

Alternativa: C.

Função do 1º grau

Essa questão também pode ser explorada no contexto de Função do 1º grau.

(ENEM 2010 - Q. 178)

Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9. b) 45. c) 64.

d) 81. e) 285.

Resolução: Seja S_n a soma dos elementos da linha n. Então:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 4 \\ s_3 &= 9 \\ s_4 &= 16 \end{aligned}$$

Podemos notar que :

$$s_1 = 1 = 1^2$$
$$s_2 = 4 = 2^2$$
$$s_3 = 9 = 3^2$$
$$s_4 = 16 = 4^2$$

O que nos leva a:

$$s_n = n^2$$

E então, a soma da 9ª linha é: $s_q = 9^2 = 81$
Poderíamos pensar em outra solução.

Observemos que o elemento central de cada linha corresponde ao número desta linha, por exemplo, o termo central da linha 3 é 3, o termo central da linha 4 é 4, então o termo central da linha n é n.

Observemos também, que antes do termo central, os números seguem em ordem crscente até o termo central formando uma P.A. de razão 1, primeiro termo igual a 1 e com n termos. O mesmo ocorreu com os termos que vêm após o termo central, porém em ordem decrescente.

Então a soma de cada linha é dada pela soma dos elementos de duas progressões aritméticas, com as características acima, menos o termo central, ou seja:

$$s_n = 2.\frac{n(n+1)}{2} - n$$

O que resulta em: $s_n = 2.\frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2$

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 161)

O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000.
b) 40 500.
c) 41 000.
d) 42 000.
e) 48 000.

Resolução:Inicialmente, observamos que, de janeiro para fevereiro e de fevereiro para março, o aumento do número de passagens foi de 1.500. Como esse padrão de crescimento se mantém, o número de passagens vendidas forma uma P.A. de primeiro termo $a_1 = 33000$ e razão r= 150, onde a_n representa o número de passagens vendidas no mês n.

Logo, o número de passagens vendidas no mês de julho é o sétimo termo dessa progressão são.

$$a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow$$
$$a_7 = 33000 + 1500(7-1) \Rightarrow$$
$$a_7 = 33000 + 9000 \Rightarrow$$
$$a_7 = 42000$$

Portanto, foram vendidas 42 000 passagens por essa empresa em julho do ano passado.

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 154)

As projeções para a produção de arroz no período de 2012 - 2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será de:

a) 497,25. b) 500,85. c) 502,87.

d) 558,75. e) 563,25.

Resolução: Obervemos que as projeções da produção, em tonelas para os anos de 2012 a 2015 formam uma P.A., onde $a_1 = 50,25$ e $r = 1,25$. Considerando que a perspectiva de aumento mantenha-se, para determinarmos a quantidade total de arroz a ser produzida de 2012 a 2021, devemos calcular s_{10}, a soma da produção dos 10 anos(2012 a 2021).

Temos:

$$
\begin{gathered}
a_n = a_1 + (n-1).r \Rightarrow \\
a_{10} = 50,25 + (10-1).1,25 \Rightarrow \\
a_{10} = 50,25 + 9.(1,25) \Rightarrow \\
a_{10} = 50,25 + 11,25 \Rightarrow \\
a_{10} = 61,5
\end{gathered}
$$

Então:

$$
\begin{gathered}
s_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2} \Rightarrow \\
s_{10} = (\frac{50,25+61,5}{2}).10 \Rightarrow \\
s_{10} = \frac{111,75}{2}.10 \Rightarrow \\
s_{10} = 558,75
\end{gathered}
$$

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 166)

O ciclo de atividade magnética do Sol tem um período de 11 anos. O início do primeiro ciclo registrado se deu no começo de 1755 e se estendeu até o final de 1765. Desde então, todos os ciclos de atividade magnética do Sol têm sido registrados.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 27 fev. 2013.

No ano de 2101, o Sol estará no ciclo de atividade magnética de número:

a) 32. b) 34. c) 33.

d) 35. e) 31.

Resolução: De acordo com o enunciado, o ciclo da atividade magnética do Sol forma uma P.A., com $a_1 = 1755$ e r = 11. Nesta sequência, o termo $a_2 = 1765$ inicia o 1° ciclo, assim o termo a_n inicia o (n) ésimo ciclo.

Para calcular a possível posição no ano de 2101 na sequência iremos substituir os dados no termo geral de uma P.A, então temos:

$$\begin{gathered} a_n = a_1 + r(n-1) \Rightarrow \\ 2101 = 1755 + 11(n-1) \Rightarrow \\ 2101 - 1755 = 11(n-1) \Rightarrow \\ 346 = 11(n-1) \Rightarrow \\ n-1 = \frac{346}{11} \Rightarrow \\ n-1 \cong 31,25 \Rightarrow \\ n \cong 32,45 \end{gathered}$$

Assim o termo que inicia um novo ciclo é o 32° e está antes do ano 2101.
Este termo é:

$$\begin{gathered} a_{32} = 1755 + r(32-1) \Rightarrow \\ a_{32} = 1755 + 341 = 2096 \end{gathered}$$

O próximo termo é :

$$a_{33} = 2096 + 11 \Rightarrow a_{33} = 2107$$

Logo, o ano 2101 está no 32° ciclo.
Alternativa: A

2.3.2 Progressão Geométrica (PG)

(ENEM 2015 - Q. 159)

O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8 000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

a) $P(t) = 0,5.t^{-1} + 8000$ b) $P(t) = 50.t^{-1} + 8000$ c) $P(t) = 4000.t^{-1} + 8000$

d) $P(t) = 8000.(0,5)^{t-1}$ e) $P(t) = 8000.(1,5)^{t-1}$

Resolução: O número de unidades produzidas forma uma PG em função do tempo decorrido, em que o primeiro termo é 8000 e a razão é 1,5. Substituindo os dados no termo geral da P.G, temos:

$$a_n = a_1.q^{n-1} \Rightarrow$$
$$P(t) = 8000.(1,5)^{t-1}$$

Assim, a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, está apresentada na alternativa E.

PG e Função Exponencial

Essa questão também pode ser explorada no contexto de função exponencial.

Um aumento de 50% na produção significa que, a cada intervalo de tempo *t*, a quantidade de unidades produzidas fica multiplicada po 1,5. Seja P(t) a quantidade anual de produtos fabricados no ano de t. Considerando que a estimativa seja alcançada, segue que:

$$P(t) = 8000.(1,5)^t; t\epsilon\mathbb{N}$$

Considerando $t \leq 1$; teremos $P(t) = 8000.(1,5)^{t-1}$.

Alternativa: E

CAPÍTULO 3

Probabilidade e Estatística

Neste capítulo evidenciamos que 69% das questões são de Estatística e, destas, 60% envolvem análise de dados, 36% medidas de tendência central e 4% medidas de dispersão. Sobre a análise de dados, o CBC aponta que esta “[...] é escolhida como um dos temas estruturadores da Matemática, pois proporciona uma adequada contextualização sociocultural, aproximando o conhecimento adquirido na Escola da realidade do aluno” (MINAS GERAIS, 2002, p. 36).

3.1 Análise Combinatória

3.1.1 Princípio fundamental da contagem

(ENEM 2012 - Q. 136)

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Resolução: A quantidade de possibilidades que um dos 6 personagens esconder em um dos 9 cômodos um dos 5 brinquedos é de:

$$6 \times 9 \times 5 = 270$$

Sabemos que todos os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira, logo podemos concluir que o diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque "há 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas".

Alternativa: A

(ENEM 2012 - Q. 173)

O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

a) 14.
b) 18.
c) 20.
d) 21.
e) 23.

Resolução:De acordo com o enunciado, para identificação das cores primárias são definidas 3 cores.

A partir da justaposição das 3 cores, 2 a 2, temos as seguintes possibilidades:

$$C_{3,2} = C_{3,1} = 3 \text{ cores secundárias.}$$

Assim, somadas, temos 6 possibilidades de cores primárias e secundárias que podem ser ainda associadas com quadrados que identificam se são claras ou escuras. Contabilizando, temos: $6 \times 3 = 18$ possibilidades

Ainda devemos contabilizar as cores: preto e branco (2 possibilidades)

No total temos: $18 + 2 = 20$ possibilidades.

Alternativa: C

(ENEM 2013 - Q. 158)

Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet.

Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres.

Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é:

a) $\dfrac{62^6}{10^6}$ b) $\dfrac{62!}{10!}$ c) $\dfrac{62!4!}{10!56!}$

d) $62! - 10!$ e) $62^6 - 10^6$

Resolução: Existem 10 possibilidades de algarismos para cada dígito de uma senha formada com números de 0 a 9, assim número total de possibilidades dessa senha com 6 dígitos é de:

$$10^6$$

No enunciando é dito que as letras maiúsculas e minúsculas se diferem, logo temos que:

$$26 \times 2 = 52$$

Assim, além das 10 possibilidades de algarismos para cada dígitos, temos também outros 52, o que implica que existem no total 62 possibilidades de algarismos.

Logo, o número total de possibilidades dessa nova senha com 6 dígitos é de:

$$62^6$$

Portanto, o coeficiente de melhora da alteração recomendada é de:

$$\frac{62^6}{10^6}$$

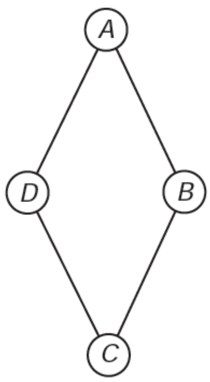
Alternativa: A

(ENEM 2013 - Q. 161)

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

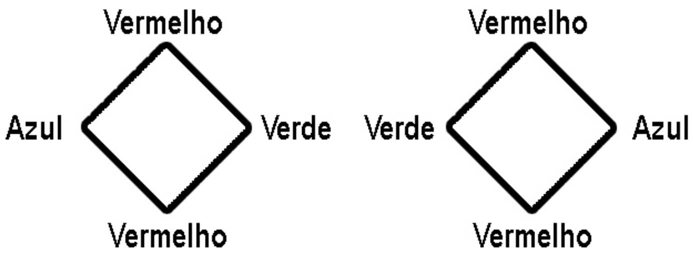


Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6. b) 12. c) 18.

d) 24. e) 36.

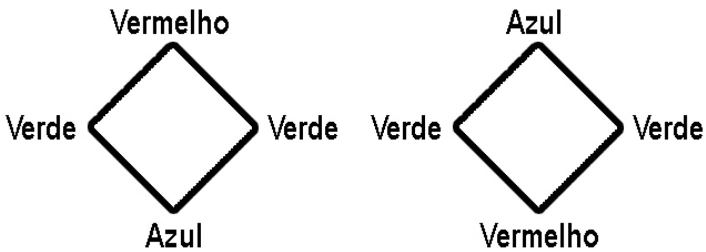
Resolução: Com base nas informações fornecidas pelo enunciado temos 3 casos diferentes.
1º Caso:
•A igual a C
•B diferente de D



Observe que a figura acima mostra que são a mesma, porém houve apenas uma rotação de 180º.

Logo, temos nesse caso, $\frac{3.2}{2} = 3$ possibilidades.

2º Caso:
•A diferente de C
•B igual a D



A figura acima é análoga a figura do 1º caso.

Logo, nesse caso também temos $\frac{3.2}{2} = 3$ possibilidades.

3º Caso:
•A igual a C
•B igual a D

Nesse caso, existem $3 \times 2 = 6$ possibilidades.

Portanto o artesão poderá obter $3 + 3 + 6 = 12$ joias diferentes nesse formato.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 142)

Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver maior pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II?

a) 21. b) 90. c) 750.

d) 1250. e) 3125.

Resolução:

1) O número máximo de pontos que as escolas I, III e V são, respectivamente, 65, 60 e 64, assim não podem ser campeãs.

2) Caso ocorra empate, a campeã seria a escola II, pois possui maior pontuação em enredo e harmonia.

3) Se as pontuações das escolas II e IV forem as da tabela abaixo, a escola II será a campeã.

Escola II	Escola IV
10	8
10	7
10	6
9	7
9	6
8	6

Para cada uma das 6 possibilidades acima listadas, as outras escolas podem ser avaliadas de 5 maneiras distintas, assim o númeor de configurações possíveis é:

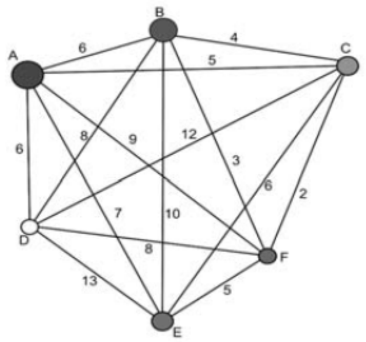
$$6 \times 5 \times 5 \times 5 = 750$$

Alternativa: C

3.1.2 **Permutação**

(ENEM 2010 - Q. 174 - Média,mediana e moda)

João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras . Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidadades B, C, D , E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele ganha 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, confome apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

a) 60 min.
b) 90 min.
c) 120 min.
d) 180 min.
e) 360 min.

Resolução: : O número de possibilidade de João efetuar as visitas corresponde ao número de ordens possíveis das cidades B, C, D, E e F, descartando-se as simétricas, ou seja:

$$\frac{P_5}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

O esquema abaixo ajuda a compreender o cálculo realizado acima:

$$A\,\underbrace{BCDEF}_{P_5}\,A$$

Como João gasta 1minuto e 30 segundos para cada sequência, então, para verificar todas as sequências possíveis, o tempo mínimo necessário é dado por:

$$60 \times (1min\,30seg) = 60min\ \times (1800seg) = 60min + \frac{1800}{60}min = 90min.$$

Alternativa: B

(ENEM 2011 - Q. 174)

O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75913 é:

a) 24.
b) 31.
c) 32.
d) 88.
e) 89.

Resolução: Realizando a permutação dos algarismos 1, 3, 5, 7, 9, obtamos $5! = 120$ números de cinco algarismos distintos.

Ao escrevermos estes númeor em ordem crescente até chegarmos no número 75913, temos:

1) $4! = 24$ números iniciados em 1.
2) $4! = 24$ números iniciados em 3.
3) $4! = 24$ números iniciados em 5.
4) $3! = 6$ números iniciados em 71.
5) $3! = 6$ números iniciados em 73.
6) $2! = 2$ números iniciados em 751.
7) $2! = 2$ números iniciados em 753.
8) O número 75 913.

Logo a ordem de chamada de um candidato com o número 75913 é:

$$24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 89.$$

Alternativa: E

(ENEM 2014 - Q. 151)

Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nehum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

a) $20 \times 8! + (3!)^2$.
b) $8! \times 5! \times 3!$.
c) $\dfrac{8! \times 5! \times 3!}{2^8}$.
d) $\dfrac{8! \times 5! \times 3!}{2^2}$.
e) $\dfrac{16!}{2^8}$.

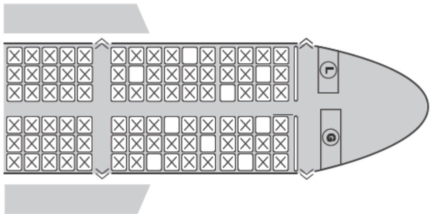
Resolução: Nas 8 primeiras locações, serão alugados os filmes de ação, sendo um por vez com 8! maneiras de permutá-los. Os filmes de comédia serão alugados nas 5 primeiras e os de drama nas 3 últimas.

Logo, temos 8!.5!.3! formas distintas de seguir a estratégia desse cliente.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 170)

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por:

a) $\dfrac{9!}{2!}$.

b) $\dfrac{9!}{7! \times 2!}$.

c) $7!$.

d) $\dfrac{5!}{2!} \times 4!$.

e) $\dfrac{5!}{4!} \times \dfrac{4!}{3!}$.

Resolução: O número de combinações possivéis de se escolher 7 lugares entre os 9 disponíveis é de :

$$C_{9,7} = \binom{9}{7}$$

Em cada uma das combinações, podemos permutar as 7 pessoas da família, logo podemos acomodar essa familia de $\dfrac{9!}{7!2!} \times 7! = \dfrac{9!}{2!}$ formas distintas.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 153)

Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por:

a) $10^2.26^2$

b) $10^2.52^2$

c) $10^2.52^2.\dfrac{4!}{2!}$

d) $10^2.26^2.\dfrac{4!}{2!.2!}$

e) $10^2.52^2.\dfrac{4!}{2!.2!}$

Resolução: Cada letra pode ser escolhida entre 26 + 26 = 52 possibilidades e cada algarismo de 10 maneiras.

Representando letra por L e algarismo por A, o número de maneiras de permutar dois L e dois A é: $\dfrac{4!}{2!.2!}$

Assim, o número total de senhas possíveis é: $10^2.52^2.\dfrac{4!}{2!.2!}$

Alternativa: E

3.1.3 Combinação

(ENEM 2009 - Q. 166)

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

a) uma combinação e um arranjo, respectivamente.

b) um arranjo e uma combinação, respectivamente.

c) um arranjo e uma permutação, respectivamente.

d) duas combinações.

e) dois arranjos.

Resolução: A ordem de escolha de times não influecia no grupo formado., assim este caso se trata de um combinação simples. Já a escolha dos 2 times que farão o primeiro jogo, a ordem influencia, logo se trata de um arranjo simples.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 157)

O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\dfrac{10!}{2!\times 8!} - \dfrac{4!}{2!\times 2!}$.

b) $\dfrac{10!}{8!} - \dfrac{4!}{21}$.

c) $\dfrac{10!}{2!\times 8!} - 2$.

d) $\dfrac{6!}{4!} + 4\times 4$.

e) $\dfrac{6!}{4!} + 6\times 4$.

Resolução: O número de combinações possivéis de se escolher 2 tenistas entre os 10 disponíveis é:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!8!}$$

O número de combinações possivéis de se escolher 2 tenistas canhotos entre os 4 disponíveis é:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!}$$

Logo, o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição

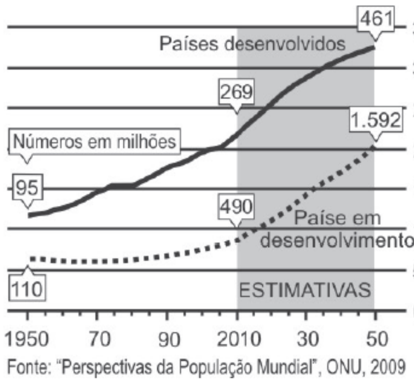
$$C_{10,2} - C_{4,2} = \frac{10!}{2!8!} - \frac{4!}{2!2!}$$

Alternativa: A

3.2 Probabilidade

(ENEM 2009 - Q. 138)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Disponível em: www.economist.com. Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de:

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{7}{20}$.

c) $\frac{8}{25}$.

d) $\frac{1}{5}$.

e) $\frac{3}{25}$.

Resolução: De acordo com os dados apresentados no gráfico, a porcentagem de pessoas com 60 anos ou mais de idade, em 2050, na população dos países desenvolvidos, estará entre 30% e 35% ou, equivalentemente, estará entre $30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$ e $35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. Podemos responder à pergunta excluindo as alternativas.

a) A resposta não pode ser a letra *a*), pois é um número negativo;

b) A resposta não pode ser a letra *b*), pois seria exatamente 35%;

c) A resposta pode ser a letra *c*), pois $\frac{8}{25} = 0,32 = 32\%$;

d) A resposta não pode ser a letra *d*), pois $\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$, e 20% obviamente não está entre 30% e 35%;

e) Da mesma forma, a resposta não pode ser a letra *e*), pois $\frac{3}{25} = 0,12 = 12\%$.

Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 146)

O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2 \times (0,2\%)^4$

b) $4 \times (0,2\%)^2$.

c) $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.

d) $4 \times (0,2\%)$.

e) $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$.

Resolução: : De acordo com o enunciado, a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Logo, a probabilidade de um aparelho deste modelo não apresentar defeito de fabricação é de 99,8%, pois estes são eventos complementares. Vamos indicar essas probabilidades por $p(D) = 0,2\%$ e $p(\bar{D}) = 99,8\%$, respectivamente.

A probabilidade de, na compra de 4 aparelhos, exatamente dois serem defeituosos é dada por:

$$p(2D2\bar{D}) = (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2 \times C_{4,2} \Rightarrow$$

$$(0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2 \times \tfrac{4!}{2!(4-2)!} \Rightarrow$$

$$(0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2 \times 6.$$

No resultado acima, $C_{4,2}$ indica de quantas formas podemos ordenar 2 aparelhos defeituosos (ou 2 não defeituosos) entre os 4 aparelhos comprados.

Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 171)

A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase. Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto 01, 02, 03, ..., 59, 60, custava R$ 1,50.

Disponível em: www.caixa.gov.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00 e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é, aproximadamente,

a) $1\frac{1}{2}$ vez menor.
b) $2\frac{1}{2}$ vezes maior.
c) 4 vezes maior.
d) 9 vezes maior.
e) 14 vezes maior.

Resolução: Em cada aposta de seis dezenas, o apostador concorre com 6 quinas, logo, em 84 apostas de seis dezenas, que não possuam cinco números em comum, o apostador vai concorrer com $84 \times 6 = 504$ quinas. Enquanto que, em uma única aposta de nove dezenas, o apostador concorre com $C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = 126$ quinas. Logo, a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao primeiro é:

$$\frac{126}{504} = \frac{1}{4}.$$

Ou seja, é a quarta parte do primeiro, 4 vezes menor.
Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 179)

Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir.

Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

a) 3 doses.
b) 4 doses.
c) 6 doses.
d) 8 doses.
e) 10 doses.

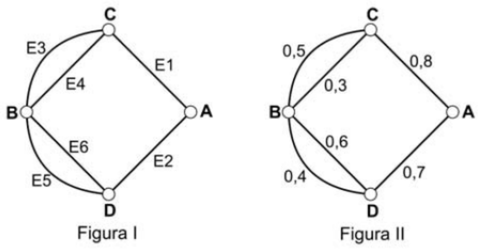
Resolução: De acordo com o enunciado, a probabilidade de o paciente sofrer algum dos efeitos colaterais a cada dose administrada é de $10\% = 0,1$. Logo, probabilidade do evento complementar, ou seja, de o paciente não sofrer algum dos efeitos colaterais a cada dose administrada é de $90\% = 0,9$.

Como a probabilidade aceitável de risco é de até 35%, a probabilidade de não possuir efeito colateral deve ser maior de 100%–35% = 65%. Logo, $(0,9)^n \geq 0,65$. Com $n = 4$, tem-se que $(0,9)^4 = 0,6561 \geq 65\%$, já com $n = 5$, $(0,9)^5 = 0,590495 < 65\%$. Logo, o maior valor de n é 4 doses.

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 156)

A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada. Assim,há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é:

a) E1E3.

b) E1E4.

c) E2E4.

d) E2E5.

e) E2E6.

Resolução: A probabilidade de Paula pegar engarrafamento em cada uma das possibilidades de trajetos para deslocar-se de A para B é:

•$E1E3 : 0,8 \times 0,5 = 0,4 = 40\%$

•$E1E4 : 0,8 \times 0,3 = 0,24 = 24\%$

•$E2E5 : 0,7 \times 0,4 = 0,28 = 28\%$

•$E2E6 : 0,7 \times 0,6 = 0,42 = 42\%$

Logo, o melhor trajeto para Paula é E1E4.

Alternativa: B

Observação: Veja que não é possível sair da cidade A e chegar até B passando pelo trajeto apontado na alternativa C, ou seja, pelas estradas E2 e E4.

(ENEM 2010 - Q. 173)

O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NÚMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é:

a) $\frac{1}{3}$. b) $\frac{1}{5}$. c) $\frac{2}{5}$.

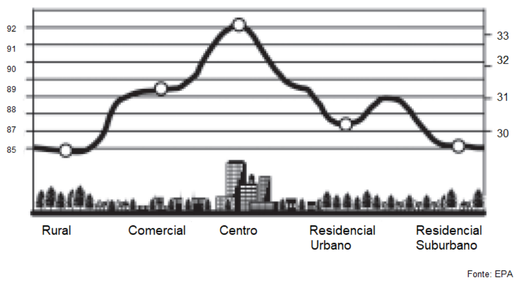
d) $\frac{5}{7}$. e) $\frac{5}{14}$.

Resolução: O exercício trata de probabilidade condicional, pois questiona a probabilidade de a pessoa selecionada calçar 38, *sabendo que ela tem calçado maior que 36.* A informação fornecida reduz o espaço amostral para a quantidade de mulheres que têm calçado maior que 36. Da tabela, vemos que esse número corresponde a: $3 + 10 + 1 = 14$. Dessas 14 mulheres, 10 calçam 38, logo, a probabilidade pedida é: $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 159)

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor"da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{1}{4}$. c) $\frac{2}{5}$.

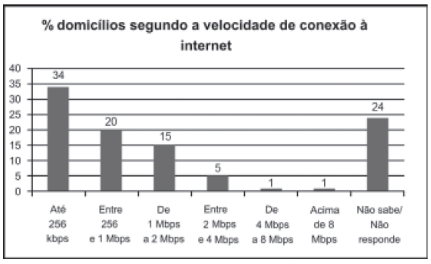
d) $\frac{3}{5}$. e) $\frac{3}{4}$.

Resolução: Das 4 regiões recomendadas para Rafael morar (Rural, Comercial, Residencial Urbano e Residencial Suburbano), 3 apresentam temperaturas das "ilhas de calor"inferiores a $31°C$, de acordo com os dados do gráfico. Logo, escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é de 3 em 4.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 165)

O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo comitê Gestor da Internet(CGI).



Disponível em: http://agencia.ipea.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicilío?

a) 0,45. b) 0,42. c) 0,30.

d) 0,22. e) 0,15.

Resolução: Supondo que entre os 24% que não sabem ou não responderam não haja domicílios com conexão de pelo menos 1 Mbps, há, de acordo com os dados do gráfico, pelo menos 1 Mbps em $(15+5+1+1)\%$ domicílios, ou seja, em $22\% = 0,22$.

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 166)

Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

a) 8%. b) 9%. c) 11%.

d) 12%. e) 22%.

Resolução: Inicialmente vamos determinar o número de elementos do espaço amostral, ou seja, o número de pessoas vacinadas no posto específico. De acordo com a tabela, esse número é:

$$42 + 22 + 56 + 30 + 50 = 200$$

Dessas 200 pessoas, 22 são portadoras de doenças crônicas. Logo, escolhendo-se, aleatoriamente, uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é:

$$\frac{22}{200} = \frac{11}{100} = 11\%.$$

Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 167)

Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).

O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

a) Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.

b) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

c) Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

d) Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo..

e) Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Resolução: Vamos analisar quantas são as possibilidades de soma que resultam em 12, 17 e 22 para saber qual dos 3 possui mais chance de ganhar.

•Soma 12, de Arthur: (1;11), (2;10), (3;9), (4;8) e (5;7), 5 possibilidades;

•Soma 17, de Bernardo: (2;15), (3;14), (4; 13), (5; 12), (6; 11), (7; 10) e (8; 9), 7 possibilidades;

•Soma 22, de Caio: (7; 15), (8; 14), (9; 13) e (10; 12), 4 possibilidades.

Logo, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.

Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 138)

Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada urna. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:
1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;
2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;
3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;
4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.
Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

a) Azul. b) Amarela. c) Branca.

d) Verde. e) Vermelha.

Resolução: Inicialmente o número de bolas na urna 2 é $0+1+2+3+4=10$. Após passar uma bola para esta urna, a quantidade passa a ser 11, que corresponde ao número de elementos do espaço amostral. Vamos, agora, determinar o número de bolas de cada cor que pode ter na urna 2 após o jogador passar uma bola da urna 1 para a 2:

•Amarela: 0 ou 1; Azul: 1 ou 2; Branca: 2 ou 3; Verde: 3 ou 4; Vermelha: 4.

Nota-se que, depois de passar uma bola para a urna 2, as cores verde e vermelha são as que mais podem figurar na urna. Analisemos a probabilidade de cada uma destas cor ocorrer:

•Probabilidade de a bola retirada da urna 2 ser vermelha: $\frac{4}{11}$;

•Probabilidade de a bola retirada da urna 2 ser verde: $\frac{3}{11}$ ou $\frac{4}{11}$, conforme a bola colocada na urna 2 não for verde ou for verde, respectivamente.

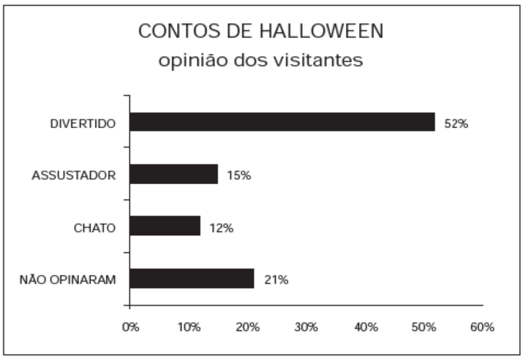
Como a probabilidade de a bola ser vermelha é sempre $\frac{4}{11}$, essa é a cor que deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar.

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 164)

Em um blog de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em: “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o blog registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem.

O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do blog irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por:

a) 0,09.

b) 0,12.

c) 0,14.

d) 0,15.

e) 0,18.

Resolução: A porcentagem de pessoas que opinaram é de 52% + 15% + 12% = 79%. Destes, 12% assinalaram a opção "chato". Logo, a probabilidade pedida é de:

$$\frac{12\,\%}{79\,\%} \cong 0,1518$$

Alternativa: D

(ENEM 2012 - Q. 174)

José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é:

a) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

b) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

c) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

d) José, já que há 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

e) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

Resolução: Vamos analisar quantas são as possibilidades de soma que resultam em 7, 4 e 8 para saber qual dos 3 possui mais chance de ganhar.

•Soma 7, de José: (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2) e (6; 1), 6 possibilidades;

•Soma 4, de Paulo: (1; 3), (2; 2) e (3; 1), 3 possibilidades;

•Soma 8, de Antônio: (2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3) e (6; 2), 5 possibilidades.

Logo, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é José, pois há 6 possibilidades para formar a sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 155)

Numa escola com 1 200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.

Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

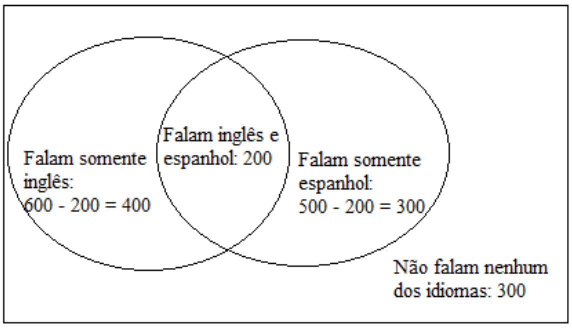
d) $\frac{5}{6}$

e) $\frac{5}{14}$

Resolução: O exercício trata de probabilidade condicional, pois questiona a probabilidade de escolher um aluno que fale espanhol, sabendo que ele não fala inglês. De acordo com os dados do enunciado, temos:

• 600 falam inglês (I) + 500 falam espanhol (E) + 300 não falam qualquer um desses idiomas = 1400 alunos;

•Como o total de alunos é 1200, segue que 1400 – 1200 = 200 alunos falam inglês e espanhol (IE). Assim, podemos montar o esquema abaixo:

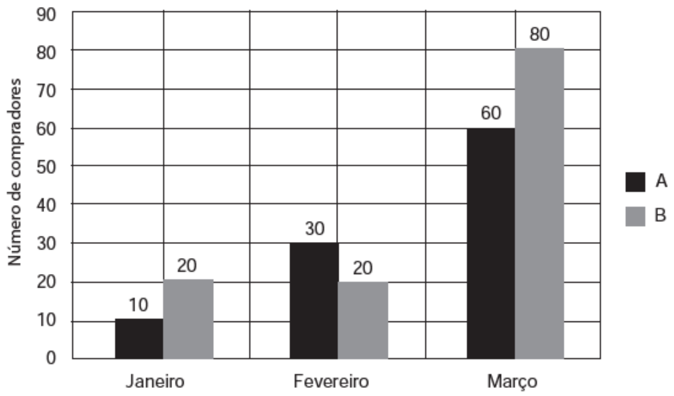


Vemos, pelo esquema acima, que a quantidade de alunos que não fala inglês é de 300, que fala somente espanhol, mais 300, que não fala nenhum dos dois idiomas, ou seja, o número de elementos do espaço amostral – quantidade de alunos que não fala inglês – é de 600. Dentre esses 600, 300 alunos falam espanhol. Logo, a probabilidade pedida é: $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$.

Alternativa: A

(ENEM 2013 - Q. 141)

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$.

b) $\frac{3}{242}$.

c) $\frac{5}{22}$.

d) $\frac{6}{25}$.

e) $\frac{7}{15}$.

Resolução: O número de compradores do produto A é $10+30+60 = 100$. Destes, 30 fizeram suas compras em fevereiro de 2012. Já o número de compradores do produto B é de $20+20+80 = 120$, sendo que 20 fizeram compras em fevereiro. Logo, a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012, ou seja, a probabilidade de que o comprador do produto A sorteado e o comprador do produto B sorteado tenham feito suas compras em fevereiro é de:

$$\frac{30}{100} \times \frac{20}{120} = \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}.$$

Alternativa: A

(ENEM 2013 - Q. 175)

Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso.

Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como:

a) excelente. b) bom. c) regular.

d) ruim. e) péssimo.

Resolução: De acordo com os dados do enunciado, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Logo, os demais, $\frac{100}{100} - \frac{54}{100} = \frac{46}{100}$ foram produzidos pela máquina II. Dos parafusos produzidos pela máquina I, $\frac{25}{1000} = \frac{2,5}{100}$ são defeituosos, enquanto que, para a máquina II, esse número é de $\frac{38}{1000} = \frac{3,8}{100}$.
O desempenho conjunto é dado a partir da probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso, então vamos determinar essa probabilidade. Devemos considerar, inicialmente, a probabilidade de o parafuso ter sido produzido pelas máquinas I e II e, uma vez "determinada essa máquina", qual seria a probabilidade de ela ter produzido um parafuso defeituoso, ou seja, a probabilidade pedida é:

$$\frac{54}{100} \times \frac{2,5}{100} + \frac{46}{100} \times \frac{3,8}{100} = \frac{135}{10000} + \frac{174,8}{10000} = \frac{309,8}{10000} = \frac{3,098}{100}$$

Logo, o desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como bom.

Alternativa: B

(ENEM 2013 - Q. 176)

Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis, serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela.

O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Arthur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8 números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são:

a) Caio e Eduardo.
b) Arthur e Eduardo.
c) Bruno e Caio.
d) Arthur e Bruno.
e) Douglas e Eduardo.

Resolução: Vamos determinar o número de apostas de 6 dezenas realizadas por cada apostador:

•Arthur: $250 \times C_{6,6} = 250 \times 1 = 250$;

•Bruno: $41 \times C_{7,6} + 4 \times C_{6,6} = 41 \times 7 + 4 \times 1 = 291$;

•Caio: $12 \times C_{8,6} + 10 \times C_{6,6} = 12 \times 28 + 10 \times 1 = 346$;

•Douglas: $4 \times C_{9,6} = 4 \times 84 = 336$;

•Eduardo: $2 \times C_{10,6} = 2 \times 210 = 420$.

Logo, os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são Caio e Eduardo.

Alternativa: A

Observação: Nos cálculos acima, $C_{n,6}$ indica o número de apostas com 6 dezenas em uma aposta feita com n dezenas.

(ENEM 2014 - Q. 152)

O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é:

a) 0,02048. b) 0,08192. c) 0,24000.

d) 0,40960. e) 0,49152.

Resolução: A probabilidade de que o candidato erre uma resposta é de 0,2. Logo, a probabilidade de ele acertar é de $1–0,2 = 0,8$. Para que o teste termine na quinta pergunta, o candidato deve ter errado uma das quatro primeiras e, naturalmente acertado as outras três, e errar a quinta pergunta. A probabilidade de isso acontecer é: $C_{4,1} \times 0,8^3 \times 0,2^2 = 4 \times 0,512 \times 0,04 = 0,08192$.

Alternativa: B

Observação: Nos cálculos acima, $C_{4,1}$ indica a quantidade de ordens em que o candidato pode errar 1 das 4 primeiras perguntas.

(ENEM 2014 - Q. 162)

Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de:

a) 47,5%. b) 85,0%. c) 86,3%.

d) 94,4%. e) 95,0%.

Resolução: O exercício trata de probabilidade condicional, pois a sensibilidade é definida como a probabilidade de o resultado do teste ser positivo, sabendo que ele paciente está com a doença. Dos dados apresentados no quadro, segue que o número de pacientes com a doença A é de $95+5=100$, o que corresponde ao número de elementos do espaço amostral. Destes, 95 obtiveram positivo como resultado do teste. Logo, a probabilidade pedida é: $\frac{95}{100}=95\%$.

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 149)

Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é:

a) 23,7%.
b) 30,0%.
c) 44,1%.
d) 65,7%.
e) 90,0%.

Resolução: A probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30% = 0,3. Logo, a probabilidade do evento complementar é de $100\%-70\%=0,7$. Assim, a probabilidade de nenhum dos três alunos responder à pergunta feita pelo entrevistador é de:

$$0,7\times 0,7\times 0,7=0,343=34,3\%.$$

E, então, a probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta respondida em inglês é:

$$100\%-34,3\%=65,7\%.$$

Alternativa: D

(ENEM 2015 - Q. 175)

Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame antidoping. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: Sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: Sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: Sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades, obtém-se:

a) P(I) < P(III) < P(II). b) P(II) < P(I) < P(III). c) P(I) < P(II) = P(III).

d) P(I) = P(II) < P(III). e) P(I) = P(II) = P(III).

Resolução: Em 20 equipes com 10 atletas cada uma, há um total de 200 atletas, o que corresponde ao número de elementos do espaço amostral. Desses 200, apenas 1 havia utilizado a substância proibida (dopado). A probabilidade desse atleta ser um dos 3 escolhidos, em cada um dos modos, é dada abaixo:

•Modo I: Suponhamos que o atleta dopado (D) seja o primeiro a ser sorteado. Logo, os outros dois a serem sorteados serão não dopados (ND). Assim, a sequência do sorteio seria D, ND e ND, cuja probabilidade é dada por:

$$\frac{1}{200} \times \frac{199}{199} \times \frac{198}{198} = \frac{1}{200}.$$

Mas como há 3 ordens distintas em que o atleta dopado pode ser sorteado – o primeiro, o segundo ou o terceiro, segue que P(I) é dada pela razão acima, $\frac{1}{200}$, multiplicada por 3, ou seja, $P(I) = 3 \times \frac{1}{200} = \frac{3}{200}$.

•Modo II: A probabilidade de sortear uma das equipes é de $\frac{1}{20}$. Uma vez sorteada a equipe, vamos analisar a probabilidade de o atleta dopado ser sorteado. Note que, agora, o número de elementos do espaço amostral é 10, que é o número total de atletas de cada equipe. Também já sabemos que há 3 ordens possíveis para que o atleta dopado seja sorteado, logo, P(II) é dada por:

$$P(II) = \frac{1}{20} \times (3 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{9} \times \frac{8}{8}) = \frac{3}{200} .$$

•Modo III: A equipe que tem o atleta dopado pode ser sorteada em 3 ordens distintas, por isso, o 3 no início do produto abaixo. A probabilidade de a equipe com a atleta dopado ser sorteada é $\frac{1}{20}$ e, naturalmente, as demais não terão o atleta dopado, então, até o momento, temos o produto $3 \times (\frac{1}{20} \times \frac{19}{19} \times \frac{18}{18})$.

E agora, devemos analisar o sorteio de um atleta de cada uma dessas equipes, para isso, consideramos que o atleta dopado vai ser sorteado na sua equipe $\frac{1}{10}$ e nas demais, naturalmente, não serão sorteados atletas dopados $(\frac{10}{10} \times \frac{10}{10})$. Das informações anteriores, segue que:

$$P(III) = 3 \times (\frac{1}{20} \times \frac{19}{19} \times \frac{18}{18}) \times (\frac{1}{10} \times \frac{10}{10} \times \frac{10}{10}) = \frac{3}{200}.$$

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 180)

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

a) $\frac{1}{100}$. b) $\frac{19}{100}$. c) $\frac{20}{100}$.

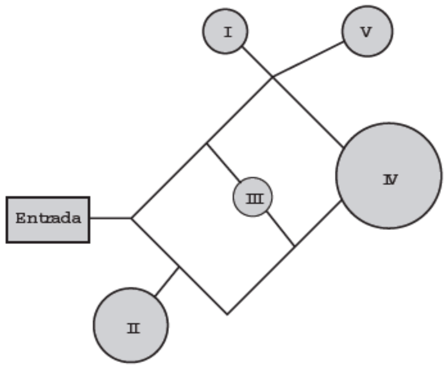
d) $\frac{21}{100}$. e) $\frac{80}{100}$.

Resolução: O número de elementos do espaço amostral é 100, dos quais, 20 são números de 1 a 20. Logo, a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20 é $\frac{20}{100}$.

Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 147)

Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentarem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessiamente passa por ela ou retorna.

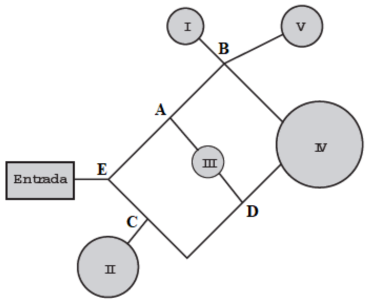
Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a:

a) $\frac{1}{96}$. b) $\frac{1}{64}$. c) $\frac{5}{100}$.

d) $\frac{21}{100}$. e) $\frac{80}{100}$.

Resolução: Considere o esquema abaixo, onde foram inseridos os pontos **E**, **A**, **B**, **C** e **D**.

Considerando que o adolescente faça o trajeto **E A B IV**, a probabilidade para este trajeto é de: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$



sendo $\frac{1}{12}$ a probabilidade de acertar o caminho quando está em E, $\frac{1}{2}$ a probabilidade de acertar estando em A e $\frac{1}{3}$ quando estiver em B. Agora, considerando que ele faça o trajeto **E C D IV**, a probabilidade é: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

sendo $\frac{1}{2}$ a probabilidade de acertar o caminho quando está em E, C e D.

Logo, a probabilidade pedida é: $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2+3}{24} = \frac{5}{24}$

Alternativa: C

3.3 Estatística

3.3.1 Análise de dados

(ENEM 2009 - Q. 139)

Dados da Associação Nacional de Empresas de Transportes Urbanos (ANTU) mostram que o número de passageiros transportados mensalmente nas principais regiões metropolitanas do país vem caindo sistematicamente. Eram 476,7 milhões de passageiros em 1995, e esse número caiu para 321,9 milhões em abril de 2001. Nesse período, o tamanho da frota de veículos mudou pouco, tendo no final de 2008 praticamente o mesmo tamanho que tinha em 2001.

O gráfico a seguir mostra um índice de produtividade utilizado pelas empresas do setor, que é a razão entre o total de passageiros transportados por dia e o tamanho da frota de veículos.

Disponível em: http://www.ntu.org.br. Acesso em 16 jul. 2009 (adaptado).

Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a:

a) 355 milhões.
b) 400 milhões.
c) 426 milhões..
d) 441 milhões.
e) 477 milhões.

Resolução: Sejam P o número de passageiros e F o número de veículos da frota. O índice de produtividade (i) é dado pela razão entre P e F, respectivamente, ou seja, $i = \dfrac{P}{F}$.

De acordo com os dados do gráfico e do enunciado, para o mês de abril de 2001, temos a seguinte igualdade:

$$i = \frac{P}{F} \Rightarrow 400 = \frac{321,9 \times 1\ mês}{F} \Rightarrow$$

$$F = \frac{321,9 \times 1\ mês}{400}$$

Para outubro de 2008, temos:

$$i = \frac{P}{F} \Rightarrow 441 = \frac{P \times 1\ mês}{F} \Rightarrow P \times 1\ mês = 441 \times F$$

Supondo que as frotas totais de veículos naquelas regiões metropolitanas em abril de 2001 e em outubro de 2008 eram do mesmo tamanho, os dados do gráfico e os cálculos acima permitem inferir que o total de passageiros transportados no mês de outubro de 2008 foi aproximadamente igual a:

$$P \times 1\ mês = 441 \times F \Rightarrow P \times 1\ mês \Rightarrow$$

$$441 \times \frac{321,9 \times 1\ mês}{400} \Rightarrow P = \frac{441 \times 321,9}{400} \Rightarrow \cong 355$$

Alternativa: A

(ENEM 2009 - Q. 142)

A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.

Centers for Disease Control and Prevention CDC-EIS Summer Course – 1992 (adaptado).

De acordo com as informações do gráfico,

a) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

b) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

c) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

d) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

e) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

Resolução: Analisando o gráfico, vemos que o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade, pois, por exemplo, entre 1 e 14 cigarros diários, o número de casos de câncer é constante.

Alternativa: E

(ENEM 2009 - Q. 143)

O gráfico a seguir mostra a evolução, de abril de 2008 a maio de 2009, da população economicamente ativa para seis Regiões Metropolitanas pesquisadas.

Disponível em: www.ibge.gov.br.

Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09, seja de 4%, então o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 será igual a:

a) 23 940. b) 32 228. c) 920 800.

d) 23 940 800. e) 32 228 000.

Resolução: Pelos dados apresentados no gráfico, a população economicamente ativa em 05/09 é de 23 020 000. Considerando que a taxa de crescimento da população economicamente ativa, entre 05/09 e 06/09 é de 4%, o número de pessoas economicamente ativas em 06/09 é dado por:

$$1,04 \times 23\,020\,000 = 23940800$$

ou, primeiro calculando 4% de 23 020 000 e depois somando a este valor a população em 05/09:

$$0,04 \times 23\,020\,000 = 920800 \Rightarrow 920\,800 + 23\,020\,000 = 23\,940\,800$$

Alternativa: D

(ENEM 2009 - Q. 172)

Nos últimos anos, o volume de petróleo exportado pelo Brasil tem mostrado expressiva tendência de crescimento, ultrapassando as importações em 2008. Entretanto, apesar de as importações terem se mantido praticamente no mesmo patamar desde 2001, os recursos gerados com as exportações ainda são inferiores àqueles despendidos com as importações, uma vez que o preço médio por metro cúbico do petróleo importado é superior ao do petróleo nacional. Nos primeiros cinco meses de 2009, foram gastos 2,84 bilhões de dólares com importações e gerada uma receita de 2,24 bilhões de dólares com as exportações. O preço médio por metro cúbico em maio de 2009 foi de 340 dólares para o petróleo importado e de 230 dólares para o petróleo exportado. O quadro a seguir mostra os dados consolidados de 2001 a 2008 e dos primeiros cinco meses de 2009.

Comércio exterior de petróleo
(milhões de metros cúbicos)

Ano	Importação	Exportação
2001	24,19	6,43
2002	22,06	13,63
2003	19,96	14,03
2004	26,91	13,39
2005	21,97	15,93
2006	20,91	21,36
2007	25,38	24,45
2008	23,53	25,14
2009*	9,00	11,00

*Valores apurados de janeiro a maio de 2009.

Disponível em: http://www.anp.gov.br. Acesso em: 15 jul. 2009 (adaptado).

Considere que as importações e exportações de petróleo de junho a dezembro de 2009 sejam iguais a $\frac{7}{5}$ das importações e exportações, respectivamente, ocorridas de janeiro a maio de 2009. Nesse caso, supondo que os preços para importação e exportação não sofram alterações, qual seria o valor mais aproximado da diferença entre os recursos despendidos com as importações e os recursos gerados com as exportações em 2009?

a) 600 milhões de dólares. b) 840 milhões de dólares. c) 1,34 bilhão de dólares.

d) 1,44 bilhão de dólares. e) 2,00 bilhões de dólares.

Resolução: De acordo com os dados da tabela, a importação e a exportação, em milhões de metros cúbicos, em 2009, foram 9 e 11, respectivamente. Considerando que as importações e exportações de petróleo de junho a dezembro de 2009 sejam iguais a $\frac{7}{5}$ das importações e exportações ocorridas de janeiro a maio de 2009, estes seriam, respectivamente, $\frac{7}{5} \times 9 = \frac{63}{5}$ e $\frac{7}{5} \times 11 = \frac{77}{5}$.

Nesse caso, supondo que os preços para importação e exportação não sofram alterações, estes valores seriam, para o ano de 2009:

•Valor das importações, em milhões de dólares:

$$2840 + \frac{7}{5} \times 9 \times 10^6 \times 340 = 2840 + 4284 = 7124$$

•Valor das exportações, em milhões de dólares:

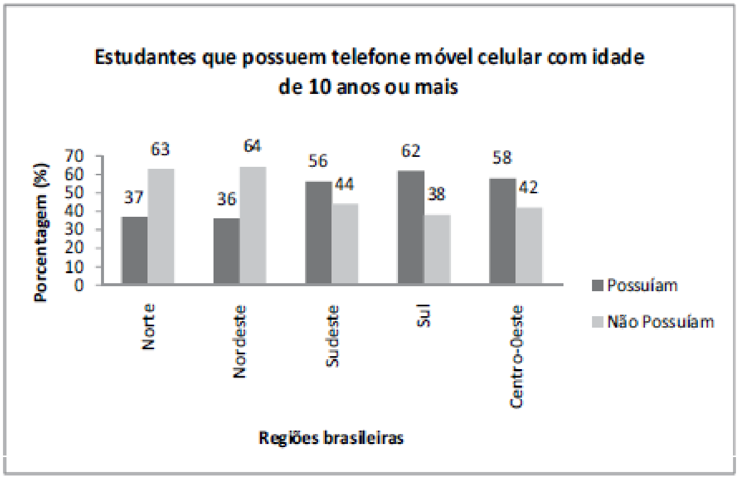
$$2240 + \frac{7}{5} \times 11 \times 10^6 \times 230 = 2240 + 3542 = 5782$$

Logo, a diferença entre os recursos despendidos com as importações e os recursos gerados pelas exportações, em milhões de dólares, é: 7124–5782 = 1342 $\cong 1,34$ bilhão de dólares.

Alternativa: C

(ENEM 2010 - Q. 141)

Os dados do gráfico foram coletados por meio da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios.



Fonte: IBGE. Disponível em: http: //www.ibge.gov.br Acesso em: 18 abr. 2010 (adaptado).

Supondo-se que, no Sudeste, 14 900 estudantes foram entrevistados nessa pesquisa, quantos deles possuíam telefone móvel celular?

a) 513. b) 556. c) 450.

d) 344. e) 536.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, a porcentagem de estudantes do Sudeste que possuem telefone móvel celular com idade de 10 anos ou mais é de 56%. Supondo que, no Sudeste, 14900 estudantes foram entrevistados e que estes tenham 10 anos ou mais, a quantidade dos que possuem telefone celular é de 56% de 14900, ou seja:

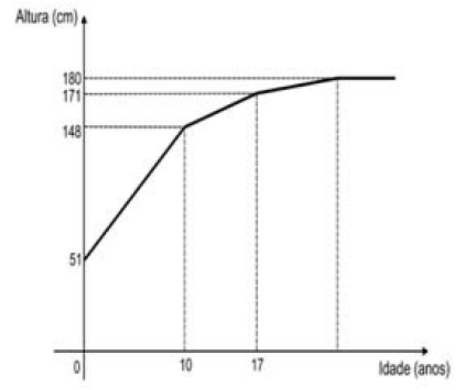
$$0,56 \times 14\,900 = 8344.$$

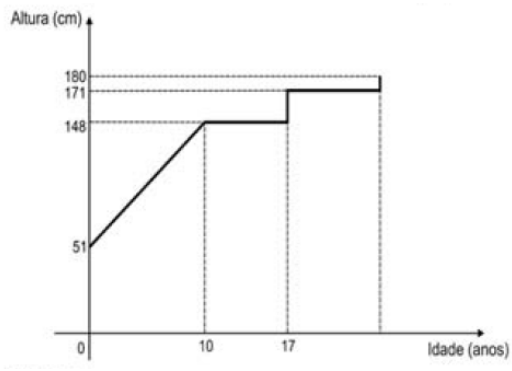
Alternativa: D

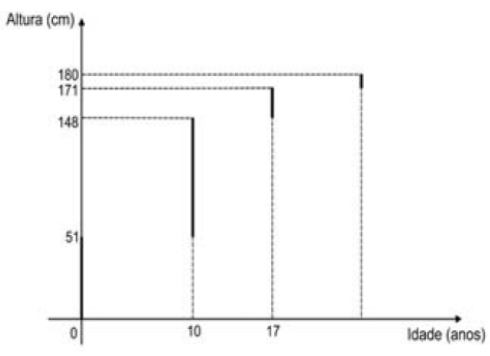
(ENEM 2010 - Q. 142)

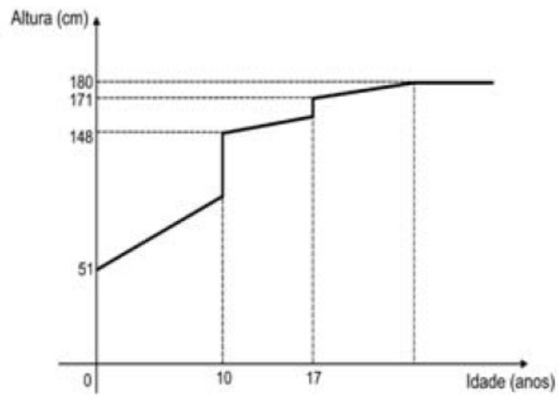
Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

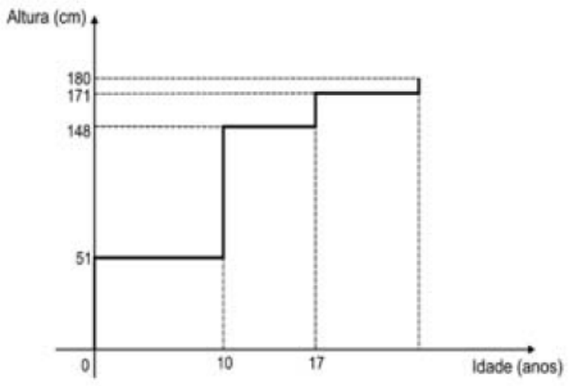
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

a) 

b) 

c) 

d) 

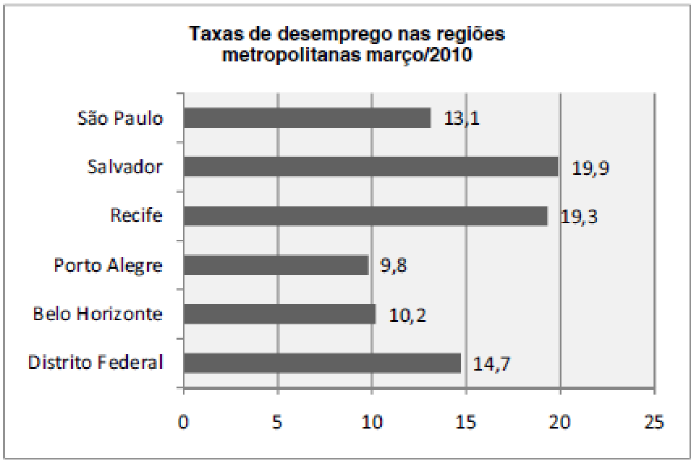
e) 

Resolução: De acordo com o enunciado e considerando que o crescimento é contínuo até certa idade, o gráfico que melhor representa a altura do filho desse casal é o da alternativa A. Podemos notar, por exemplo, que no gráfico da alternativa B, dos 10 aos 17 anos a altura manteve-se constante, no gráfico de C, o menino passou de 51 para 148 cm quando estava com 10 anos.

Portanto, o gráfico que melhor respresenta a altura do filho desse casal em função da idade é o da alternativa A.

(ENEM 2010 - Q. 145)

Os dados do gráfico seguinte foram gerados a partir de dados colhidos no conjunto de seis regiões metropolitanas pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese).



Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 28 abr. 2010 (adaptado).

Supondo que o total de pessoas pesquisadas na região metropolitana de Porto Alegre equivale a 250 000, o número de desempregados em março de 2010, nessa região, foi de:

a) 24 500.

b) 25 000.

c) 220 500.

d) 223 000.

e) 227 500.

Resolução: De acordo com os dados apresentados no gráfico, a taxa de desemprego na região metropolitana de Porto Alegre em março de 2010 foi de 9,8%. Supondo que o total de pessoas pesquisadas nessa região equivale a 250.000, o número de desempregados em março de 2010, na região metropolitana de Porto Alegre, foi de 9,8% de 250.000, ou seja: $0,098 \times 250000 = 24500$.

Alternativa: A

(ENEM 2010 - Q. 148)

O gráfico a seguir apresenta o gasto militar dos Estados Unidos, no período de 1988 a 2006.

Almanaque Abril 2008. Editora. Abril.

Com base no gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de:

a) U$ 1 174 000,00. b) U$ 14 740 000,00. c) U$ 417 400 000,00

d) U$ 41 740 000 000,000. e) U$ 417 400 000 000,00.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, o gasto militar no início da guerra no Iraque foi de U$ 417,4 bilhões de dólares, ou seja, U$ 417 400 000 000,00.

Alternativa: E

(ENEM 2010 - Q. 180)

Para conseguir chegar a um número recorde de produção de ovos de Páscoa, as empresas brasileiras começam a se planejar para esse período com um ano de antecedência. O gráfico a seguir mostra o número de ovos de Páscoa produzidos no Brasil no período de 2005 a 2009.

Revista Veja. São Paulo: Abril, ed. 2107, n°14, ano 42.

De acordo com o gráfico, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi:

a) 2004-2005. b) 2005-2006. c) 2006-2007.

d) 2007-2008. e) 2008-2009.

Resolução: A produção acumulada por biênio só pode ser obtida pelo gráfico no período de 2005 a 2009, pois o gráfico não apresenta valores fora desse período. Logo, a alternativa A não pode ser a correta, devido à impossibilidade de obter a produção acumulada para 2004-2005. De acordo com o gráfico, a produção acumulada de 2005 a 2009 é apresentada abaixo:

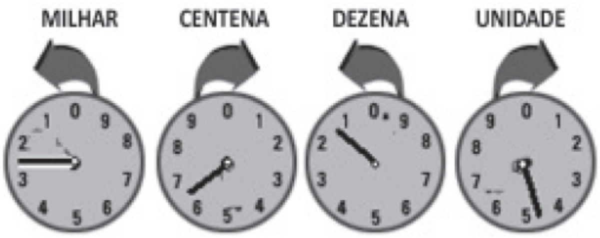
Biênio	Produção acumulada
2005-2006	90 + 94 = 184
2006-2007	94 + 99 = 193
2007-2008	99 + 107 = 206
2008-2009	107 + 113 = 220

Logo, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi 2008-2009.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 137)

O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:



Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é:

a) 2 614. b) 3 624. c) 2 715.

d) 3 725. e) 4 162.

Resolução: De acordo com a figura, temos que:
•O ponteiro indicador dos milhares está entre 2 e 3, indicando 2 milhares;
•O ponteiro indicador das centenas está entre 6 e 7, indicando 6 dezenas;
•O ponteiro indicador das dezenas está entre 1 e 2, indicando 1 dezena;
•O ponteiro indicador das unidades está entre 4 e 5, indicando 4 unidades. Logo, a leitura, em KWh, é 2614.

Alternativa: A

(ENEM 2011 - Q. 156)

A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

Como fica a tarifa

Residencial

Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
140	R$ 71,04	R$ 64,75	R$ 6,29
185	R$ 93,87	R$ 85,56	R$ 8,32
350	R$ 177,60	R$ 161,86	R$ 15,74
500	R$ 253,72	R$ 231,24	R$ 22,48

Baixa renda

Consumo Mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
30	R$ 3,80	R$ 3,35	R$ 0,45
65	R$ 11,53	R$10,04	R$ 1,49
80	R$ 14,84	R$12,90	R$ 1,94
100	R$ 19,31	R$16,73	R$ 2,59
140	R$ 32,72	R$28,20	R$4,53

Fonte: Celpe

Diário de Pernambuco. 28 abr. 2010 (adaptado).

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda"e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da reduçaõ da tarifa de energia, mais aproximada, é de:

a) R$ 0,27. b) R$ 0,29. c) R$ 0,32.

d) R$ 0,34. e) R$ 0,61.

Resolução: Pelos dados apresentados na tabela, vemos que um consumidor baixa renda que gastou 100KWh depois da redução da tarifa, pagou R$ 16,73 pela conta, logo, o valor de cada KWh foi de: $\frac{16,73}{100} = 0,1673$. Enquanto que um consumir residencial que gastou 185 KWh depois da redução da tarifa, pagou R$ 85,56 pela conta, logo, o valor de cada KWh para esse consumidor foi de: $\frac{85,56}{185} \cong 0,46$. Então, A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de: $0,46 - 0,1673 = 0,2927$.

Alternativa: B

(ENEM 2011 - Q. 169)

A figura apresenta informações biométricas de um homem (Duílio) e de uma mulher (Sandra) que estão buscando alcançar seu peso ideal a partir das atividades físicas(corrida). Para se verificar a escala de obesidade, foi desenvolvida a fórmula que permite verificar o Ìndice de Massa Corporal (IMC). Esta fórmula é apresentada como $IMC = M/H^2$, onde m é a massa em quilogramas e h é a altura em metros.

Veja. Ed. 2055 (adaptado).

No quadro é apresentada a Escala de Índice de Massa Corporal com as respectivas categorias relacionadas aos pesos.

Escala de Índice de Massa Corporal	
CATEGORIAS	**IMC (kg/m²)**
Desnutrição	Abaixo de 14,5
Peso abaixo do normal	14,5 a 20
Peso normal	20 a 24,9
Sobrepeso	25 a 29,9
Obesidade	30 a 39,9
Obesidade mórbida	Igual ou acima de 40

Nova Escola. N° 172, maio 2004.

A partir dos dados biométricos de Duílio e Sandra e da Escala de IMC, o valor IMC e a categoria em que cada uma das pessoas se posiciona na Escala são:

a) Duílio tem o IMC 26,7 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.

b) Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 29,1, estando ambos na categoria de sobrepeso.

c) Duílio tem o IMC 27,3 e Sandra tem o IMC 26,6, estando ambos na categoria de sobrepeso.

d) Duílio tem o IMC 25,6, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 24,7, estando na categoria de peso normal.

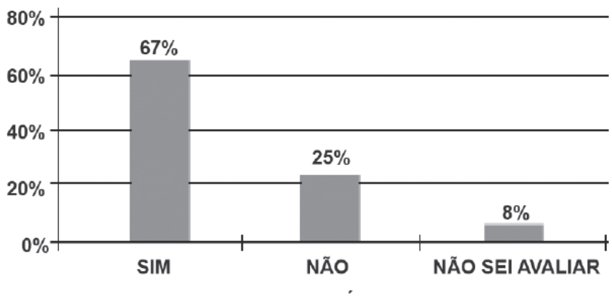
e) Duílio tem o IMC 25,1, estando na categoria de sobrepeso, e Sandra tem o IMC 22,6, estando na categoria de peso normal.

Resolução: De acordo com as informações da primeira tabela, o IMC de Duílio e Sandra são, respectivamente, $\frac{96,4}{(1,88)^2} \approx 27,3$ e $\frac{84}{(1,70)^2} \approx 29,1$. Logo, a partir das informações da segunda tabela e dos cálculos acima, segue que ambos estão na categoria sobrepeso.

Alternativa: B

(ENEM 2011 - Q. 172)

Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três as alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Època.Ed. 619, 29 marc. 2010(adaptado).

Analisando os dados do gráfico, quantos internautas respoderam "NÃO"à enquete?

a) Menos de 23.

b) Mais de 23 e menos de 25.

c) Mais de 50 e menos de 75.

d) Mais de 100 e menos de 190.

e) Mais de 200.

Resolução: De acordo com o gráfico, dos 279 internautas que responderam à enquete, 25% disseram "NÃO", o que corresponde a $0,25 \times 279 \cong 70$ internautas.

Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 173)

A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque a temperatura fica acima de 10000 k.

A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da Sequência Principal

Classe Espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	5×10^5	40	18
B0	28 000	2×10^4	18	7
A0	9 900	80	3	2.5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

Temperatura em Kelvin.

Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade. Disponível em: http://www.zenite.nu. Acesso em: 1 maio 2010 (adaptado).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

a) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.
b) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.
c) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.
d) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.
e) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

Resolução: Vamos identificar na tabela a classe espectral desta estrela e a do Sol e, então, obtermos a razão da luminosidade da estrela para a luminosidade do Sol. De acordo com a tabela, o Sol se encontra na classe espectral G2, cuja temperatura de 5770 K é a mais próxima dos 6000 K, apontados no texto como sendo a sua temperatura.

Uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol se encontra na classe espectral B0, com temperatura na faixa dos 28000 K, pois: $5770 \times 5 \approx 28000$.

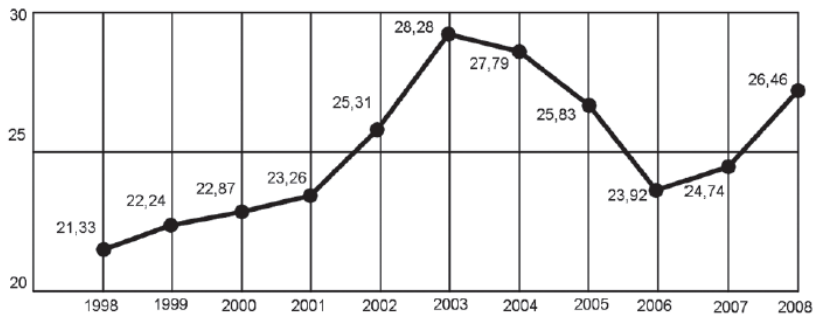
Segundo a tabela, a luminosidade na classe espectral B0 é igual a 2.104 e a luminosidade do Sol é igual a 1, logo, a luminosidade desta estrela será 20000 vezes a luminosidade do Sol: $\dfrac{2 \times 10^4}{1} = 20000$.

Alternativa: A

(ENEM 2011 - Q. 176)

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010.** São Paulo: Abril, ano 36(adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda de participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de:

a) 1998 e 2001.
b) 2001 e 2003.
c) 2003 e 2006.
d) 2003 e 2007.
e) 2003 e 2008.

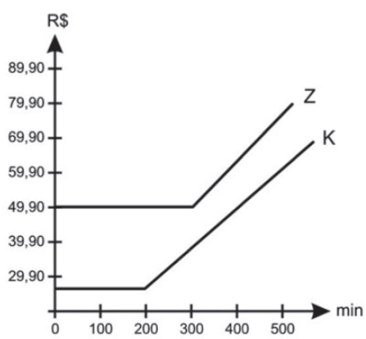
Resolução: De acordo com o gráfico, de 2003 a 2006 houve uma queda na participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro, passando de $28,28\%$ para $23,92\%$.

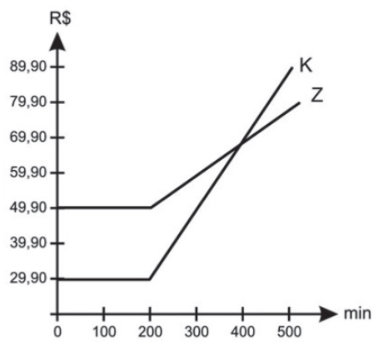
Alternativa: C

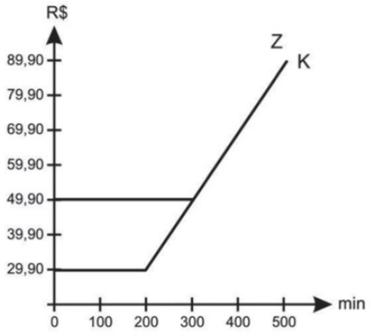
(ENEM 2011 - Q. 180)

Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano k, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

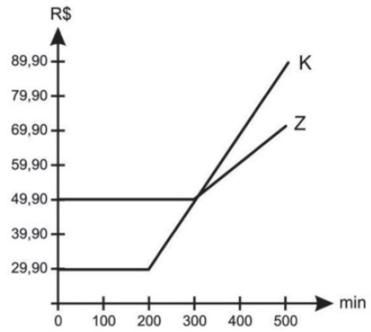
O gréfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é:

a) 

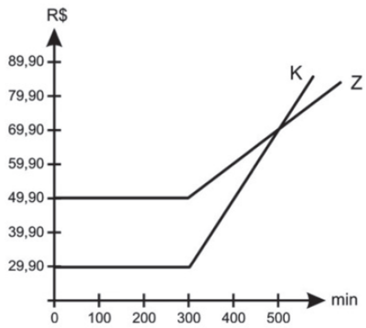
b) 



c)



d)



e)

Resolução: No plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos. Em termos gráficos, isso significa uma função constante de R$ 29,90 até 200 minutos. Já no plano Z, o valor a ser pago é constante até 300 minutos, e esse valor é de R$ 49,90. Apenas com essas duas informações, já é possível eliminar algumas alternativas, vejamos:

•No gráfico da alternativa A, veja que o valor constante de K vai até os 200 minutos, porém, no eixo y, que indica a quantia a ser paga, o valor está abaixo de R$29,90, logo, não pode ser a letra A;

•No gráfico da alternativa B, tanto em K quanto em Z, a função é constante até os 200 minutos, sendo que Z deve ser constante (R$ 49,90) até 300 minutos. Assim, a resposta correta também não pode ser a letra B;

•No gráfico da alternativa E, ocorre algo semelhante ao que ocorre na alternativa B, porém a constante agora vai até os 300 minutos.

Então já descartamos 3 alternativas, restando apenas C e D. Continuemos analisando as condições dos planos. Em K, o cliente paga R$ 0,20 por cada minuto além dos 200, e no plano Z, paga R$ 0,10 por cada minuto além dos 300 minutos, o que indica que as inclinações das retas em ambos os casos são diferentes, não podendo, então, a alternativa C ser a correta.

Logo, o gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é o apresentado na alternativa D.

Alternativa: D

Análise de dados e Função do 1° grau

Essa é uma questão que também pode ser trabalhada no contexto de Funções do 1º Grau. Vejamos uma possível solução nesse contexto: Sendo x o número de minutos utilizados por mês, tem-se:

• No plano K, até 200 minutos, o cliente paga R$ 29,90. A partir de 200 minutos, paga R$ (29,90 + (x – 200).0,20);

• No plano Z, até 300 minutos, o cliente paga R$ 49,90. A partir de 300 minutos, paga R$ (49,90 + (x – 300).0,10).

Logo, as funções, em cada caso, são definidas acima por:

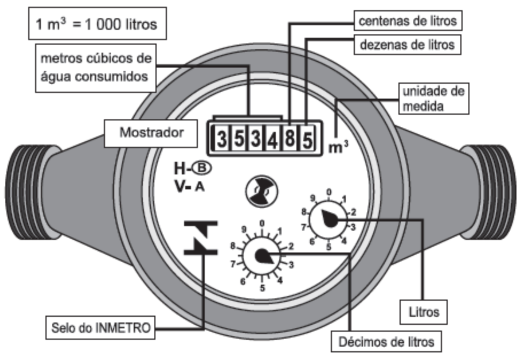
$$f_k(x) = \begin{cases} 29,90, sex \leq 200 \\ 29,90 + (x - 200).0,20, sex > 200 \end{cases}$$

$$f_z(x) = \begin{cases} 49,90, sex \leq 300 \\ 49,90 + (x - 300).0,10, sex > 300 \end{cases}$$

A partir das funções definidas acima, poderia ser feita análise dos gráficos de e para determinar a resposta correta.

(ENEM 2012 - Q. 139)

Os hidrômetros são marcadores de consumo de água em residências e estabelecimentos comerciais. Existem vários modelos de mostradores de hidrômetros, sendo que alguns deles possuem uma combinação de um mostrador e dois relógios de ponteiro. O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m3, e os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Um dos relógios de ponteiros indica a quantidade em litros, e o outro em décimos de litros, conforme ilustrados na figura a seguir.



Disponível em: www.aguasdearacoiaba.com.br (adaptado).

Considerando as informações indicadas na figura, o consumo total de água registrado nesse hidrômetro, em litros, é igual a:

a) 3 534,85.
b) 3 544,20.
c) 3 534 850,00.
d) 3 534 859,35.
e) 3 534 850,39.

Resolução: O número formado pelos quatro primeiros algarismos do mostrador fornece o consumo em m^3, então, de acordo com a figura, esse consumo foi de $3534m^3$, o que corresponde a 3 534 000 litros. Já os dois últimos algarismos representam, respectivamente, as centenas e dezenas de litros de água consumidos. Logo, de acordo com a imagem, foram consumidas mais 8 centenas de litros e 5 dezenas de litro, ou seja, 800 + 50 = 850 litros.

Nos ponteiros, há indicação de consumo de mais 9 litros e 3,5 décimos de litros, sendo que este último indica 0,35 litros.

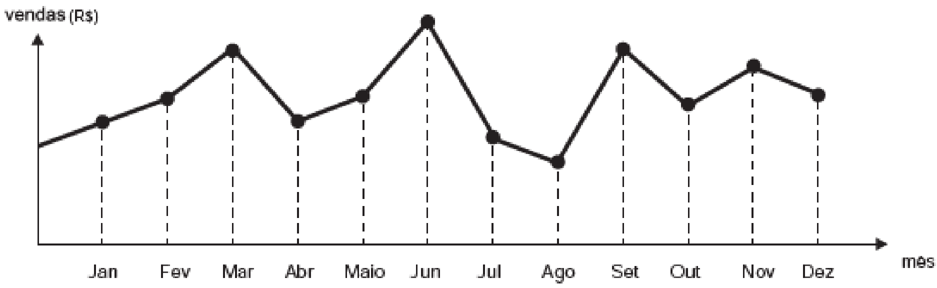
Portanto, o consumo total de água indicado no hidrômetro da figura, em litros, é igual a:

$$3\,534\,000 + 850 + 9 + 0,35 = 3\,534\,859,35.$$

Alternativa: D

(ENEM 2012 - Q. 140)

O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram:

a) março e abril.
b) março e agosto.
c) agosto e setembro.
d) junho e setembro.
e) junho e agosto.

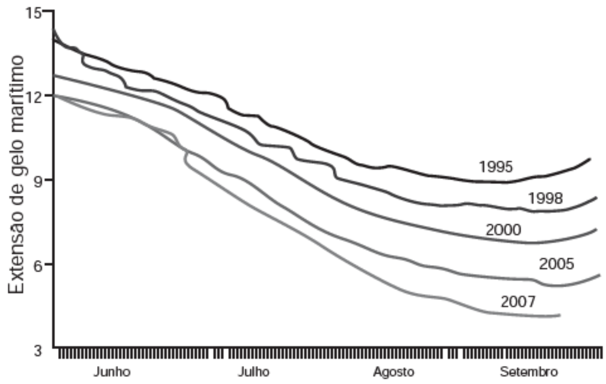
Resolução: De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram junho e agosto.

Alternativa: E

(ENEM 2012 - Q. 143)

O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.

Disponível em: http://sustentabilidade.allianz.com.br. Acesso em: fev. 2012 (adaptado).



Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em:

a) 1 995. b) 1 998. c) 2 000.

d) 2 005. e) 2 007.

Resolução: De acordo com o texto, o gelo do mar funciona como sistema de resfriamento da Terra e, portanto, o maior aquecimento global ocorre quando a extensão de gelo marítimo for mínima, o que, de acordo com o gráfico, ocorreu em 2007.

Alternativa: E

(ENEM 2012 - Q. 144)

Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A seguinte tabela ilustra os resultados da pesquisa.

Rotina Juvenil	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à televisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

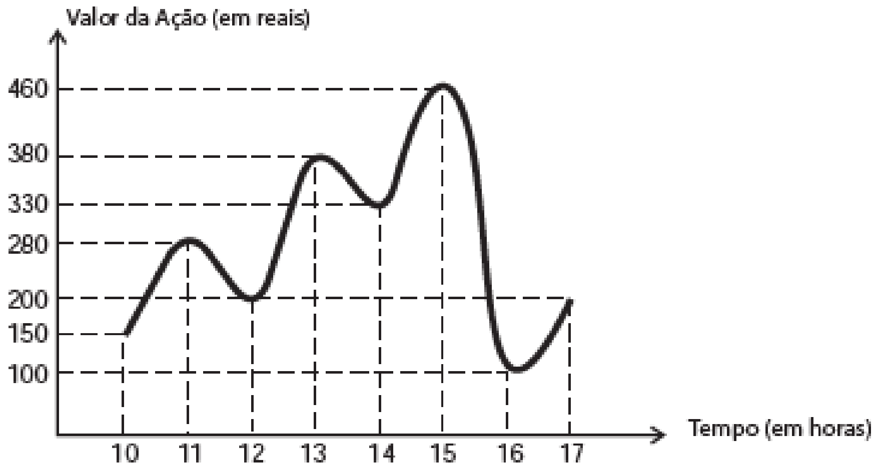
a) 20.
b) 21.
c) 24.
d) 25.
e) 27.

Resolução: De acordo com os dados da tabela, um jovem entre 12 e 18 anos gasta 5 horas de segunda a sexta com atividades escolares e 1 hora no final de semana (sábado e domingo). Logo, de acordo com esta pesquisa, um jovem entre 12 e 18 anos gasta, na semana inteira (de segunda a domingo) a seguinte quantidade de horas nas atividades escolares: $5 \times 5 + 2 \times 1 = 25 + 2 = 27$.

Alternativa: E

(ENEM 2012 - Q. 158)

O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Neste dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da Compra	Hora da Venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) 1. b) 2. c) 3.

d) 4. e) 5.

Resolução: Utilizando os dados do gráfico e da tabela, vamos calcular o percentual de rendimento de cada investidor:

•Investidor 1: Comprou por 150 e vendeu por 460, logo teve um lucro de 460 – 150 = 310 em relação a 150, ou seja, seu percentual de rendimento foi de: $\frac{310}{150} \cong 2,07 = 207\%$;

•Investidor 2: Comprou por 150 e vendeu por 200, logo teve um lucro de 200 – 150 = 50 em relação a 150, ou seja, seu percentual de rendimento foi de: $\frac{50}{150} \cong 0,33 = 33\%$;

•Investidor 3: Comprou por 380 e vendeu por 460, logo teve um lucro de 460 – 380 = 80 em relação a 380, ou seja, seu percentual de rendimento foi de: $\frac{80}{380} \cong 0,21 = 21\%$;

•Investidor 4: Comprou por 460 e vendeu por 100, logo, teve prejuízo;

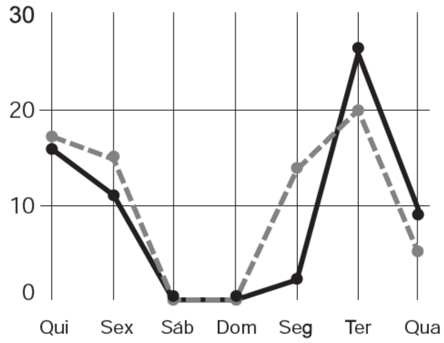
•Investidor 5: Comprou por 100 e vendeu por 200, logo teve um lucro de 200 – 100 = 100 em relação a 200, ou seja, seu percentual de rendimento foi de: $\frac{100}{100} = 1 = 100\%$.

Logo, o investidor que fez o melhor negócio foi o de número 1.

Alternativa: A

(ENEM 2012 - Q. 159)

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://blog.bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na:

a) Segunda e na terça-feira.

b) Terça e na quarta-feira.

c) Terça e na quinta-feira.

d) Quinta-feira, no sábado e no domingo.

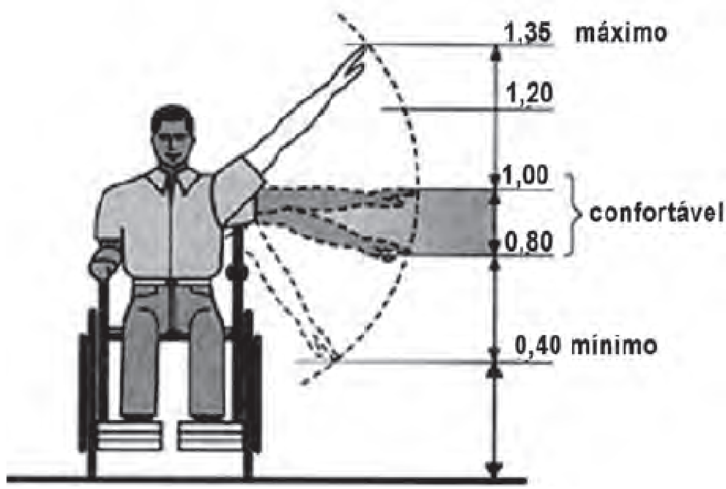
e) Segunda, na quinta e na sexta-feira.

Resolução: De acordo com o gráfico, os únicos dias em que o nível de eficiência foi muito bom, ou seja, o gráfico de linha continua, que representa o número de reclamações resolvidas, está acima do gráfico de linha tracejada, que representa o número de reclamações recebidas, são terça e quarta-feira.

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 167)

Num projeto da parte elétrica de um edifício residencial a ser construído, consta que as tomadas deverão ser colocadas a 0,20 m acima do piso, enquanto os interruptores de luz deverão ser colocados a 1,47 m acima do piso. Um cadeirante, potencial comprador de um apartamento desse edifício, ao ver tais medidas, alerta para o fato de que elas não contemplarão suas necessidades. Os referenciais de alturas (em metros) para atividades que não exigem o uso de força são mostrados na figura seguinte.



Uma proposta substitutiva, relativa às alturas de tomadas e interruptores, respectivamente, que atenderá àquele potencial comprador é:

a) 0,20 m e 1,45 m.

b) 0,20 m e 1,40 m.

c) 0,25 m e 1,35 m.

d) 0,25 m e 1,30 m.

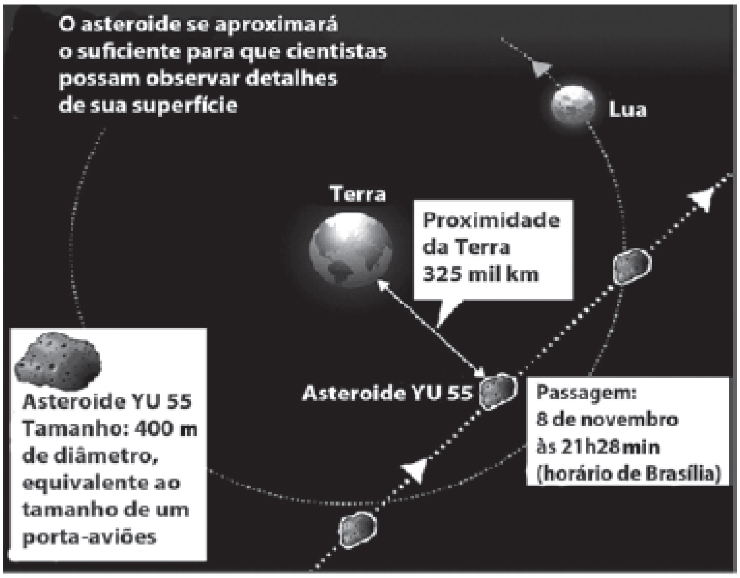
e) 0,45 m e 1,20 m.

Resolução: De acordo com a figura, para atender às necessidades do cadeirante, as tomadas devem ser colocadas a uma altura maior ou igual a 0,40 m e os interruptores devem ser colocados a uma altura menor ou igual a 1,35 m. Entre as alternativas, a única que atende ao cadeirante da figura é a alternativa E.

Alternativa E

(ENEM 2012 - Q. 168)

A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a:

a) $3,25 \times 10^2 km$.
b) $3,25 \times 10^3 km$.
c) $3,25 \times 10^4 km$.
d) $3,25 \times 10^5 km$.
e) $3,25 \times 10^6 km$.

Resolução: De acordo com a figura, a menor distancia que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a 325 mil km, ou seja: $325000 km = 3,25 \times 10^5 km$.

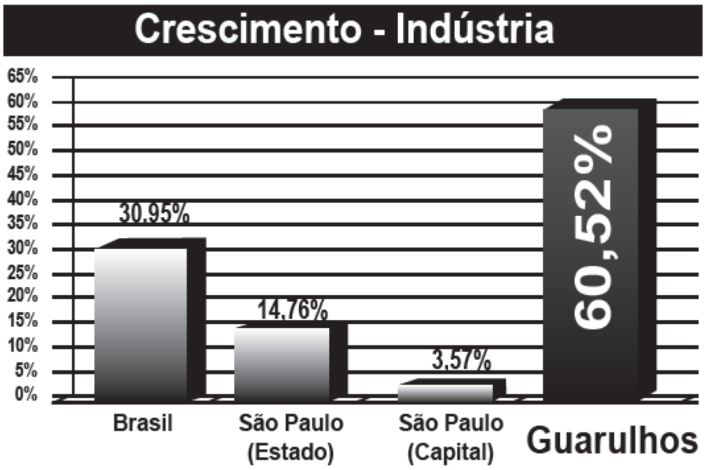
Alternativa: D

Análise de dados e notação científica

Apesar de a questão demandar certa análise da figura para obter a resposta, esta é uma questão que entendemos que possa ser trabalhada no contexto de Notação Científica.

(ENEM 2013 - Q. 139)

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

a) 75,28. b) 64,09. c) 56,95.

d) 45,76. e) 30,07.

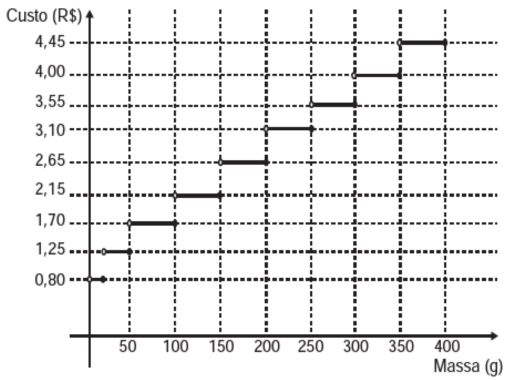
Resolução: Como a questão não explicita que São Paulo (capital) é o município do Brasil com menor crescimento industrial, vamos admitir que "a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias"pedida seja "a diferença entre a maior e a menor porcentagem apresentada no gráfico", esta diferença, em porcentagem, é dada por:

$$60,52 - 3,57 = 56,95.$$

Alternativa: C

(ENEM 2013 - Q. 149)

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de:

a) 8,35. b) 12,50. c) 14,40.

d) 15,35. e) 18,05.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, os custos para enviar uma carta não comercial pelos Correios de 100g, 200g e 350 g são, respectivamente, R$ 1,70, R$ 2,65 e R$ 4,00. Logo, o valor gasto, em reais, para postar duas cartas de 100g, três cartas de 200g e uma carta de 350g é dado por: $2 \times 1,70 + 3 \times 2,65 + 1 \times 4 = 3,40 + 7,95 + 4 = 15,35$.

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 170)

Uma falsa relação

O cruzamento da quantidade de horas estudadas com o desempenho no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) mostra que mais tempo na escola não é garantia de nota acima da média.

Nova Escola, São Paulo, dez. 2010 (adaptado).

Dos países com notas abaixo da média nesse exame, aquele que apresenta maior quantidade de horas de estudo é:

a) Finlândia. b) Holanda. c) Israel.

d) México. e) Rússia

Resolução: Inicialmente, notemos que a Holanda não está entre os países com notas abaixo da média, ou seja, descartamos a alternativa B. De acordo com o gráfico, dos países com notas abaixo da média: México, Israel, Itália, Portugal e Rússia, aquele que apresenta maior quantidade de horas de estudo é Israel, aproximadamente 8500 horas.

Alternativa: C

(ENEM 2013 - Q. 179)

O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice.

A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

Dados relativos à produção das vacas

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a:

a) malhada.
b) mamona.
c) maravilha.
d) manteira.
e) mimosa.

Resolução: De acordo com a definição de índice de eficiência (I_e) dado no enunciado e com os dados da tabela, vamos calcular índice de eficiência de cada vaca:

•Vaca Malhada: $I_e = \dfrac{360 \times 12}{15} = 288.$

•Vaca Mamona: $I_e = \dfrac{310 \times 11}{12} \approx 284,2$

•Vaca Maravilha: $I_e = \dfrac{260 \times 14}{12} \approx 303,3$

•Vaca Mateira: $I_e = \dfrac{310 \times 13}{13} = 310$

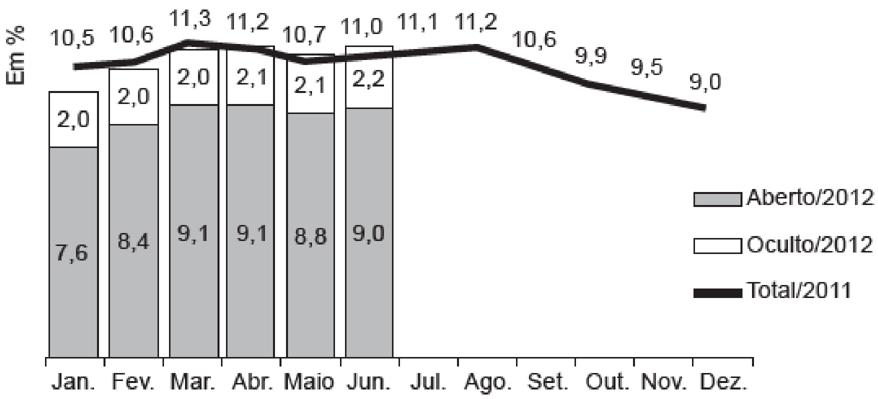
•Vaca Mimosa: $I_e = \dfrac{270 \times 12}{11} \approx 294,5$

Logo, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a Mateira.

Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 141)

O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de:

a) 1,1.
b) 3,5.
c) 4,5.
d) 6,8.
e) 7,9.

Resolução: De acordo com o gráfico, a taxa de desemprego oculto do mês de junho de 2012 foi de $2,2\%$. Logo, considerando que a mesma taxa em dezembro de 2012 tenha sido a metade da de junho de 2012, esta terá sido, em dezembro de 2012: $\dfrac{2,2\%}{2} = 1,1\%$.

Agora, considerando que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011, de acordo com o gráfico, esta terá sido de 9%. Portanto, nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de: $9\% - 1,1\% = 7,9\%$.

Alternativa: E

(ENEM 2014 - Q. 143)

O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos.

Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	**Doadores**	**Número de habitantes**	**Doadores/ habitantes**
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são:

a) Norte, Centro-Oeste e Sul.

b) Norte, Nordeste e Sudeste.

c) Nordeste, Norte e Sul.

d) Nordeste, Sudeste e Sul.

e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

Resolução: A partir dos dados do quadro, vemos que a taxa de doação de sangue no país é de 1,9% e as regiões com taxa menor ou igual a esta são Norte, Nordeste e Sudeste, com taxas respectivamente iguais a 1,5%, 1,5% e 1,9%, sendo estas as regiões nas quais deveriam ser intensificadas as campanhas na época.

Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 148)

Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1.

No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de intrução, está no Gráfico 2.

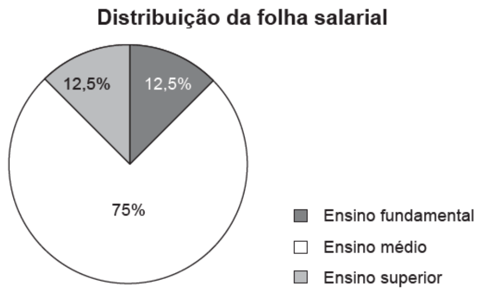


Gráfico 1

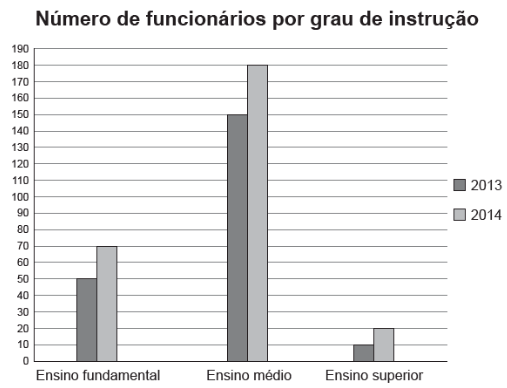


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

a) $R\$114285,00$. b) $R\$130000,00$. c) $R\$160000,00$.

d) $R\$210000,00$. e) $R\$213333,00$.

Resolução: No ano de 2013, a empresa teve um gasto mensal com a folha salarial de R\$ 400.000,00, distribuídos da seguinte forma, de acordo com os dados do gráfico 1:

•$12,5\%$ de 400.000,00 destinados para o pagamento de funcionários com Ensino Fundamental, ou seja, $0,125 \times 400.000,00 = 50.000,00$;

•75% de 400.000,00 destinados para o pagamento de funcionários com Ensino Médio, ou seja, $0,75 \times 400.000,00 = 300.000,00$;

•O mesmo valor foi destinado ao pagamento de funcionários com Ensino Superior: 50.000,00.

Utilizando as informações do gráfico 2 e os valores obtidos acima, podemos determinar o valor, em reais, que cada funcionário ganha de acordo com sua instrução escolar:

•Funcionários com Ensino Fundamental: $\dfrac{50.000,00}{50} = 1.000,00$

•Funcionários com Ensino Médio: $\dfrac{300.000,00}{150} = 2.000,00$

•Funcionários com Ensino Superior: $\dfrac{50.000,00}{10} = 5.000,00$

Agora utilizando os valores obtidos acima e, novamente, os dados do gráfico 2, podemos determinar o aumento dos gastos na folha de pagamento dos funcionários, o que equivale ao aumento da receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013:

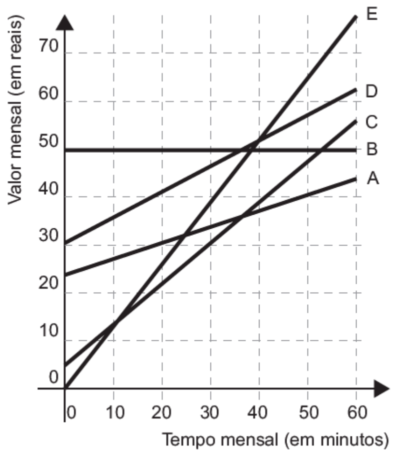
$$20 \times 1.000,00 + 30 \times 2.000,00 + 10 \times 5.000,00 = 130.000,00.$$

Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 157)

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos.

O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

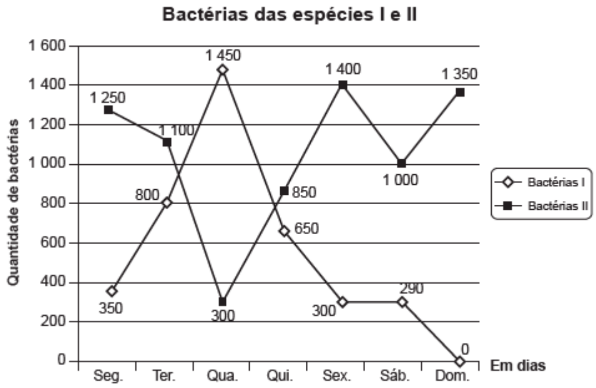
a) A.
b) B.
c) C.
d) D.
e) E.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, com exatamente R$ 30,00, o plano mais vantajoso, em tempo de chamada é o oferecido pela operadora C, que proporciona 30 minutos.

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 172)

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

a) Terça-feira. b) Quarta-feira. c) Quinta-feira.

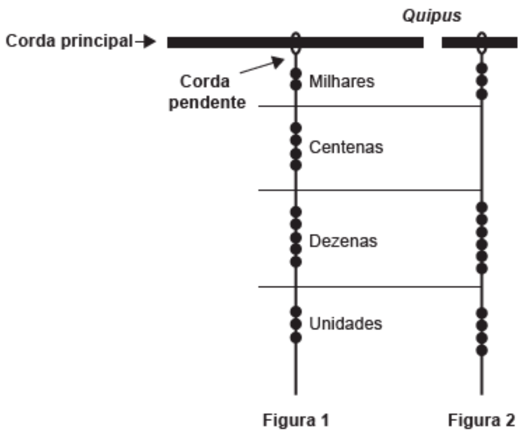
d) Sexta-feira. e) Domingo.

Resolução: De acordo com o gráfico, o dia da semana em que a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima é terça-feira, com $1100 + 800 = 1900$.

Alternativa: A

(ENEM 2014 - Q. 177)

Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado *quipus* . O *quipus* era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, oas nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.



Disponível em: www.culturaperuana.com.br. Acesso em: 13 dez. 2012.

O número da representação do *quipus* da Figura 2, em base decimal, é:

a) 364. b) 463. c) 3 064.

d) 3 640. e) 4 603.

Resolução: : De acordo com a figura 2, a corda pendente tem 3 nós no espaço dos milhares, nenhum nó no espaço das centenas, 6 nós no espaço das dezenas e 4 nós no espaço das unidades, formando, dessa forma, o número 3064.

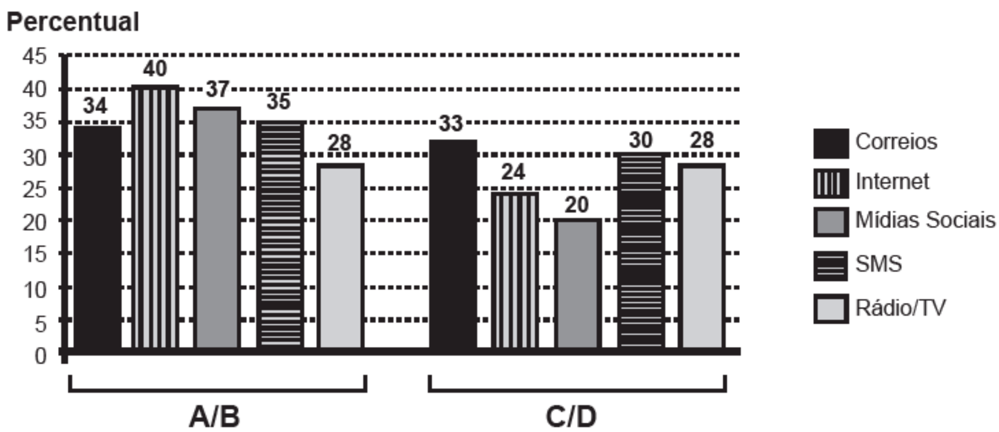
Alternativa: C

Análise de dados e Sistema de numeração decimal

Essa é uma questão que também pode ser trabalhada no contexto de Sistema de Numeração Decimal.

(ENEM 2015 - Q. 178)

Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no site da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D).

De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via:

a) correios e SMS. b) internet e correios. c) internet e internet.

d) internet e mídias sociais. e) rádio/TV e rádio/TV.

Resolução: De acordo com o gráfico, o maior número de consumidores das classes A/B que participa de promoções utiliza a internet, e o maior número de consumidores das classes C/D que participa de promoções utiliza os correios. Logo, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via internet e correios.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 139)

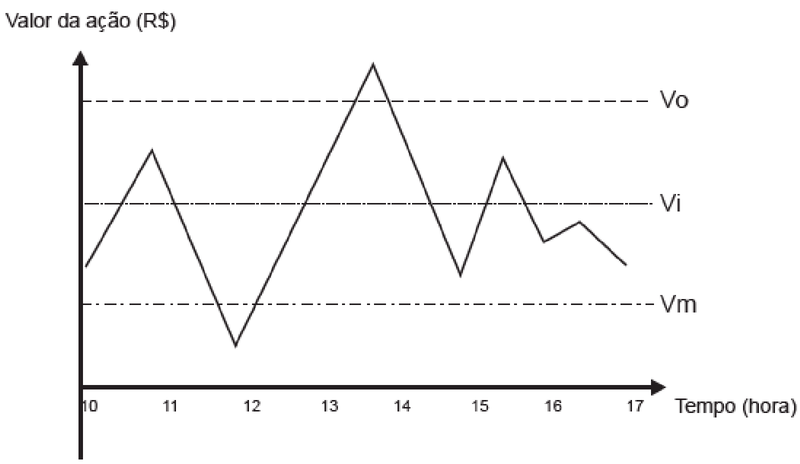
Um investidor inicia um dia com x ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações.Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal(Vi);

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (Vm);

III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (Vo).

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o investidor fez naquele dia?

a) 3. b) 4. c) 5.

d) 6. e) 7.

Resolução: De acordo com as informações do enunciado e com os dados do gráfico, investidor operou:

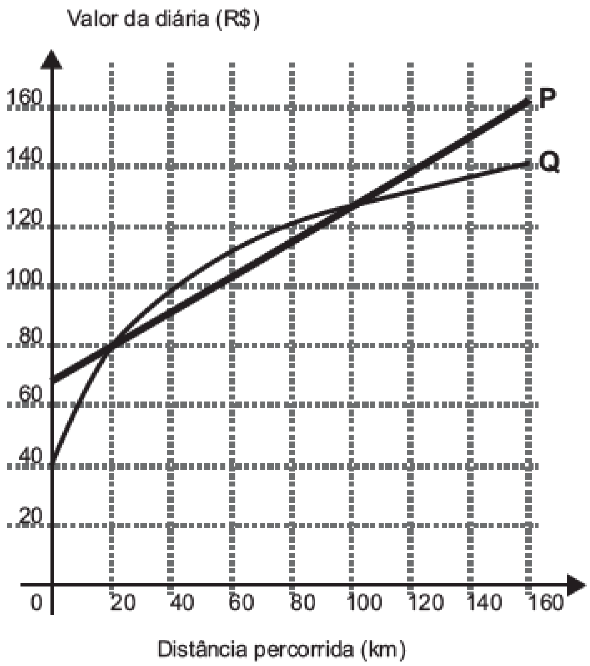
•Entre 10h e 11h: V_i;
•Entre 11h e 12h: V_m;
•Entre 12h e 13h: V_i;
•Entre 13h e 14h: V_o.

Logo, o total de operações que o investidor fez naquele dia é 4.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 141)

Atualmente existem diversas locadoras de veículos,permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras P e Q, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



O valor pago na locadora Q é menor ou igual àquele pago na locadora P para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

a) De 20 a 100.

b) De 80 a 130.

c) De 100 a 160.

d) De 0 a 20 e de 100 a 160.

e) De 40 a 80 e de 130 a 160.

Resolução: O valor pago na locadora Q é menor que o pago na locadora P quando o gráfico de Q estiver abaixo de P, e o valor será igual àquele pago na locadora P na(s) interseção(ões).

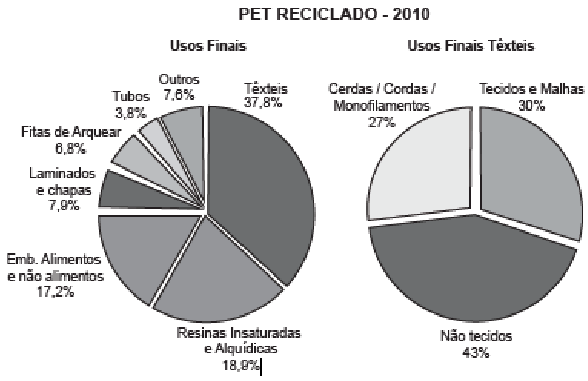
Logo, de acordo com o gráfico, isso ocorre nos intervalos de 0 a 20 e de 100 a 160.

Alternativa: D

(ENEM 2015 - Q. 150)

O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras, têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas.

Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).



Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas à produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de:

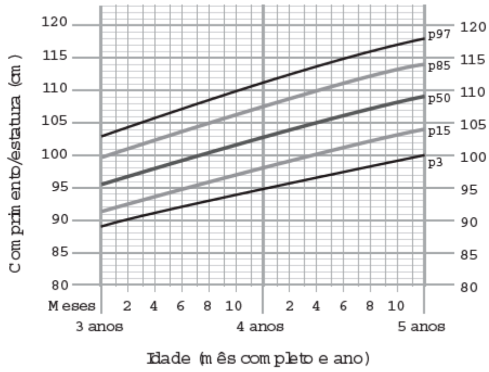
a) 16,0. b) 22,9. c) 32,0.

d) 84,6. e) 106,6.

Resolução: De acordo com o gráfico que apresenta as porcentagens para cada uso final, 37,8% vão para fibras têxteis. Como no ano de 2010 o total de PET reciclado foi de 282 Kt, segue que 0,378 x 282 106,6 Kt foram para fibras têxteis. Destes, de acordo com o gráfico que apresenta as porcentagens para cada uso final têxtil, 30% vão para tecidos e malhas, ou seja, $0,3 \times 106,632Kt$.
Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 138)

A fim de acompanhar o crescimento de crianças, foram criadas pela Organização Mundial da Saúde (OMS) tabelas de altura, também adotadas pelo Ministério da Saúde do Brasil. Além de informar os dados referentes ao índice de crescimento, a tabela traz gráficos com curvas, apresentando padrões de crescimento estipulados pela OMS. O gráfico apresenta o crescimento de meninas , cuja análise se dá pelo ponto de intersecção entre o comprimento, em centímetro, e a idade, em mês completo e ano, da criança.



Disponível em: www.aprocura.com.br. Acesso em: 22 out. 2015 (adaptado).

Uma menina aos 3 anos de idade tinha altura de 85 centímetros e aos 4 anos e 4 meses sua altura chegou a um valor que corresponde a um ponto exatamente sobre a curva p50.

Qual foi o aumento percentual da altura dessa menina, descrito com uma casa decimal, no período considerado?

a) 23,5%.
b) 21,2%.
c) 19,0%.
d) 11,8%.
e) 10,0%.

Resolução: De acordo com o gráfico, uma menina com 4 anos e 4 meses cujo crescimento acompanha a curva p50 tem a altura de 105 cm. Como com 3 anos ela tinha 85 cm segue que, nesse período, o aumento foi de 105 – 85 = 20 cm. Em porcentagem, este aumento foi de: $\frac{20}{85} \cong 0,2352 \cong 23,52\%$.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 139)

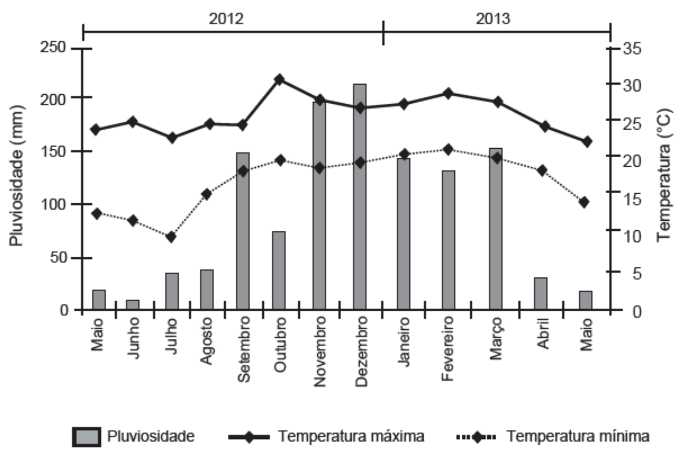
O cultivo de uma flor rara só viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

•a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;

•a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;

•ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um agricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um metereologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi:

a) Janeiro.
b) Fevereiro.
c) Agosto.
d) Novembro.
e) Dezembro.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, os meses que possuem temperatura mínima superior a 15 °C são setembro, outubro, novembro e dezembro de 2012 e janeiro, fevereiro, março e abril de 2013. Destes meses:

•De setembro para outubro de 2012 houve aumento na temperatura máxima, porém, superior a 5 °C;

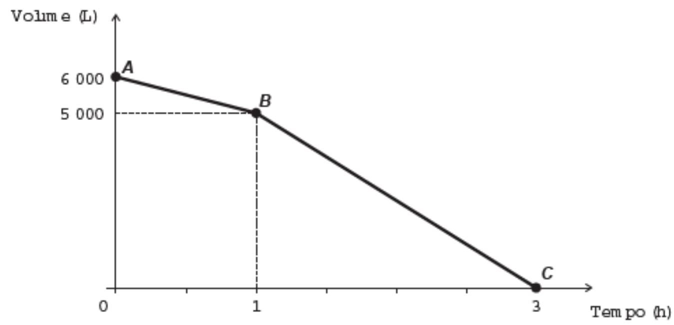
•De outubro para novembro e de novembro para dezembro de 2012 houve diminuição na temperatura máxima, o que também ocorre de fevereiro a abril de 2013.

Então as possibilidades, com base nas análises feitas até o momento, são plantar em dezembro de 2012 ou em janeiro de 2013. Analisando agora a variação de pluviosidade, vemos que de dezembro para janeiro, esta foi superior a 50mm. Logo, o mês escolhido para plantio foi janeiro.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 140)

Uma cisterna de 6 000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba,mas nas duas horas seguintes,a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna, em função do tempo.



Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a) 1 000. b) 1 250. c) 1 500.

d) 2 000. e) 2 500.

Resolução: De acordo com o gráfico, a vazão da primeira bomba é de 1000 litros por hora (l/h), pois a cisterna tinha, inicialmente, 6000 litros e, após 1 hora de funcionamento da primeira bomba, ficou com 5000 litros.

Analisando o segundo segmento de reta, há um intervalo de 2h (de 1h a 3h). Neste tempo, a primeira bomba foi responsável pela vazão de 2000 litros, pois sua vazão é de 1000l/h.

Logo, restaram 5000–2000 = 3000 litros para serem esvaziados pela segunda bomba num intervalo de 2horas, logo, sua vazão é de $\frac{3000}{2} = 1500$ l/h.

Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 151)

O censo demográfico é um levantamento estatístico que permite a coleta de várias informações. A tabela apresenta os dados obtidos pelo censo demográfico brasileiro nos anos de 1940 e 2000, referentes à concentração total, na capital e no interior, nas cinco grandes regiões.

População residente, na capital e interior segundo as Grandes Regiões 1940/2000

Grandes regiões	População residente					
	Total		Capital		Interior	
	1940	2000	1940	2000	1940	2000
Norte	1 632 917	12 900 704	368 528	3 895 400	1 264 389	9 005 304
Nordeste	14 434 080	47 741 711	1 270 729	10 162 346	13 163 351	37 579 365
Sudeste	18 278 837	72 412 411	3 346 991	18 822 986	14 931 846	53 589 425
Sul	5 735 305	25 107 616	459 659	3 290 220	5 275 646	21 817 396
Centro-Oeste	1 088 182	11 636 728	152 189	4 291 120	935 993	7 345 608

Fonte: IBGE, Censo Demográfico 1940/2000.

O valor mais próximo do percentual que descreve o aumento da população nas capitais da Região Nordeste é

a) 125%. b) 231%. c) 331%.

d) 700%. e) 800%.

Resolução: De acordo com os dados do quadro, o número de pessoas no térreo e nos andares 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 4, 5, 5, 5, 7 e 1. Logo, a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar é 5.

Alternativa: D

Análise de dados e Medidas de tendência central

Essa é uma questão que também pode ser trabalhada no contexto de Medidas de tendência central.

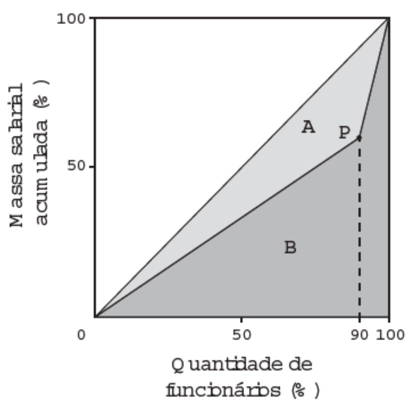
(ENEM 2016 - Q. 154)

A distribuição de salários pagos em uma empresa pode ser analisada destacando-se a parcela do total da massa salarial que é paga aos 10 % que recebam os maiores salários. Isso pode ser representado na forma de um gráfico formado por dois segmentos de reta, unidos em um ponto P, cuja abscissa tem valor igual a 90, como ilustrado na figura.

No eixo horizontal do gráfico tem-se o percentual de funcionários, ordenados de forma crescente pelos valores de seus salários, e no eixo vertical tem-se o percentual do total da massa salarial de todos os funcionários.

O Índice de Gini,mede o grau de concentração de renda de um determinado grupo, pode ser calculado pela razão A/(A+B), em que A e B são as medidas das áreas indicadas no gráfico.

A empresa tem como meta tornar seu Ìndice de Gini igual ao do país, que é 0,3. Para tanto, precisa ajustar os salários de modo a alterar o percentual que representa a parcela recebida pelos 10% dos funcionários de maior salário em relação ao total da massa salarial.



Disponível em: www.ipea.gov.br. Acesso em: 4 maio 2016 (adaptado).

Para atingir a meta desejada, o percentual deve ser:

a) 40%. b) 20%. c) 60%.

d) 30%. e) 70%.

Resolução: : Seja y_p a ordenada do ponto P, que corresponde ao ajuste percentual. Vamos calcular as áreas A e B:

•B é formada por um triângulo de base 90 e altura yp, e um trapézio de bases maior e menor medindo, respectivamente, 100 e y_p e altura 10 (100 – 90). Logo,

$$B = \frac{90 \times y_p}{2} + \frac{(100 + y_p) \times 10)}{2} = \frac{90y_p}{2} + \frac{1000}{2} + \frac{10y_p}{2} = 50y_p + 500$$

•A é determinada através da diferença entre a área A + B, que corresponde a um triângulo de base 100 e altura 100, e B, ou seja: A = A + B – B. Vamos, primeiro, calcular A + B: $A + B = \frac{100 \times 100}{2} = 5000$. Logo, $A = A + B – B = 5000–(50y_p + 500) = 4500 - 50y_p$.

Como a empresa tem como meta tornar seu Índice de Gini igual ao do país, que é 0,3, vamos considerar este valor para o índice e, então determinar y_p:

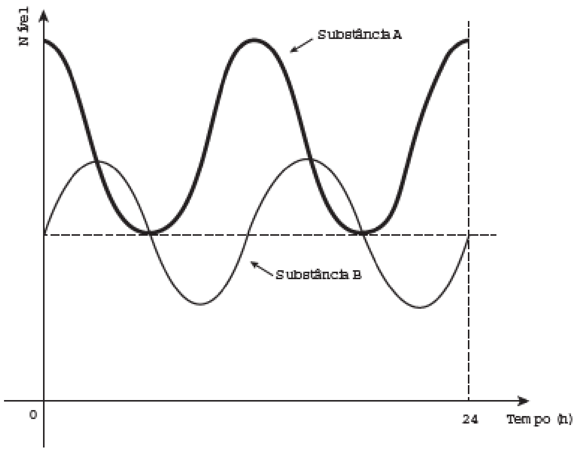
$$\frac{A}{A+B} = 0,3 \Rightarrow \frac{4500 - 50y_p}{5000} = 0,3 \Rightarrow 4500 - 50y_p = 1500 \Rightarrow y_p = 60$$

Assim, 60% representa a parcela da massa salarial recebida pelos 90% que ganham os menores salários e 40% é a parcela recebida pelos 10% que recebem os maiores salários.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 160)

Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo



número de vezes em que os níveis de A e de B forem iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.

Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes.

O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a:

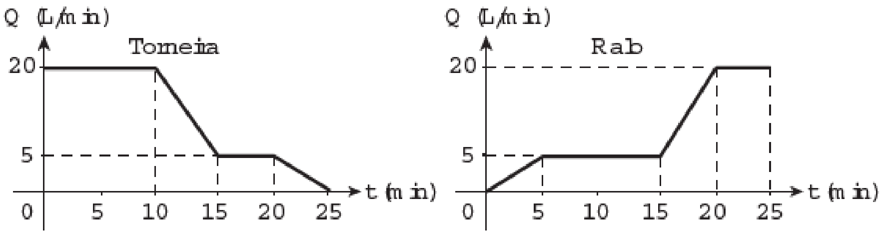
a) 28.
b) 21.
c) 2.
d) 7.
e) 14.

Resolução: De acordo com o gráfico, em um dia, ou seja, em 24 horas, os níveis das substâncias A e B foram iguais quatro vezes. No entanto, em duas delas esses níveis foram iguais ao nível mínimo da substância A, o que não e de interesse. Então, em uma semana, 7 dias, o parâmetro estabelecido pelo nutricionista deve ser igual: $a7 \times 2 = 14$.

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 163)

Um reservatório é abastecido com água por uma torneira e um ralo faz a drenagem da água desse reservatório. Os gráficos representam as vazões Q,em litro por minuto, do volume de água que entra no reservatório pela torneira e do volume que sai pelo ralo,em função do tempo t, em minuto.



Em qual intervalo de tempo, em minuto, o reservatório tem uma vazão constante de enchimento?

a) De 0 a 10.
b) De 5 a 10.
c) De 5 a 15.
d) De 15 a 25.
e) De 0 a 25.

Resolução: O reservatório terá uma vazão constante de enchimento quando as vazões da torneira e do ralo forem constantes. Do gráfico, as duas vazões são constantes, simultaneamente, no intervalo de 5 a 10.

Alternativa: B

3.3.2 Medidas de tendência central

(ENEM 2009 - Q. 147 - Média)

A tabela mostra alguns dados da emissão de dióxido de carbono de uma fábrica, em função do número de toneladas produzidas.

Produção (em toneladas)	Emissão de dióxido de carbono (em partes por milhão – ppm)
1,1	2,14
1,2	2,30
1,3	2,46
1,4	2,64
1,5	2,83
1,6	3,03
1,7	3,25
1,8	3,48
1,9	3,73
2,0	4,00

Cadernos do Gestar II, Matemática TP3.
Disponível em: www.mec.gov.br. Acesso em: 14 jul. 2009.

Os dados na tabela indicam que a taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono (em ppm) e a produção (em toneladas) é:

a) Inferior a 0,18.
b) Superior a 0,18 e inferior a 0,50.
c) Superior a 0,50 e inferior a 1,50.
d) Superior a 1,50 e inferior a 2,80.
e) Superior a 2,80.

Resolução: As variações da emissão de dióxido de carbono, em ppm, são dadas por:

•$2,30 - 2,14 = 0,16$;

•$2,46 - 2,30 = 0,16$;

•$2,64 - 2,46 = 0,18$;

•$2,83 - 2,64 = 0,19$;

•$3,03 - 2,83 = 0,20$;

•$3,25 - 3,03 = 0,22$;

•$3,48 - 3,25 = 0,23$;

•$3,73 - 3,48 = 0,25$;

•$4,00 - 3,73 = 0,27$.

Logo, a taxa média da variação da emissão de dióxido de carbono, em ppm, é dada por:

$$\frac{0,16+0,16+0,18+0,19+0,20+0,22+0,23+0,25+0,27}{9} = \frac{1,86}{9} \cong 0,206$$

A média da variação da produção, em toneladas, é 0,1, pois a variação foi constante, sempre 0,1.

Portanto, a taxa média de variação entre a emissão de carbono de dióxido de carbono e a produção é:

$$\frac{0,206}{0,1} = 2,06$$

Alternativa: D

(ENEM 2009 - Q. 150 - Média)

Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5.ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10.ª, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos Bilaterais (em milhões de dólares)

Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1.458
2006	539	744
2007	280	1.214

Disponível em: www.cartacapital.com.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor:

a) Inferior a 300 milhões de dólares.

b) Superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.

c) Superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.

d) Superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.

e) Superior a 600 milhões de dólares.

Resolução: De acordo com os dados da tabela, no período considerado, o valor médio dos investimentos da França no Brasil, em milhões de dólares, foi de:

$$\frac{825+485+1458+744+1214}{5}=\frac{4726}{5}=945,2$$

Ainda de acordo com a tabela e no período considerado, o valor médio dos investimentos do Brasil na França, também me milhões de dólares, foi de:

$$\frac{367+357+354+539+280}{5}=\frac{1897}{5}=379,4$$

Logo, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor de: $945,2–379,4=565,8$ milhões de dólares.

Alternativa: D

(ENEM 2009 - Q. 176 - Média)

O Indicador do CadÚnico (ICadÚnico), que compõe o cálculo do Índice de Gestão Descentralizada do Programa Bolsa Família (IGD), é obtido por meio da média aritmética entre a taxa de cobertura qualificada de cadastros (TC) e a taxa de atualização de cadastros (TA),em que $TC=\frac{NV}{NF}$, $TA=\frac{NA}{NV}$, NV é o número de cadastros domiciliares válidos no perfil do CadÚnico, NF é o número de famílias estimadas como público alvo do CadÚnico e NA é o número de cadastros domiciliares atualizados no perfil do CadÚnico.

Portaria n° 148 de 27 de abril de 2006(adaptado).

Suponha que o IcadÚnico de um município específico é 0,6. Porém, dobrando NF o IcadÚnico cairá para 0,5. Se $NA+NV=3600$, então NF é igual a:

a) 10 000.

b) 7 500.

c) 5 000.

d) 4 500.

e) 3 000.

Resolução: Como o ICadÚnico é dado pela média aritmética entre a TC e TA, segue que:

$$ICadUnico = \frac{TC+TA}{2} = \frac{1}{2}(TC+TA) \tag{3.1}$$

Como $TC = \frac{NV}{NF}$ e $TA = \frac{NA}{NV}$, em 3.1, obtemos:

$$ICadUnico = \frac{1}{2}(TC+TA) = \frac{1}{2}(\frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV}) \tag{3.2}$$

Supondo que o ICadÚnico de um município específico seja 0,6, em 3.2, obtemos:

$$0,6 = \frac{1}{2}(\frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV}) \Rightarrow \frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV} = 1,2 \tag{3.3}$$

Como dobrando NF o ICadÚnico cairá para 0,5, de 3.2, obtemos:

$$0,5 = \frac{1}{2}(\frac{NV}{2NF}+\frac{NA}{NV}) \Rightarrow \frac{NV}{2NF}+\frac{NA}{NV} = 1 \Rightarrow \frac{NA}{NV} = 1-\frac{NV}{2NF} \tag{3.4}$$

Substituindo 3.4 em 3.3, obtemos:

$$\frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV} = 1,2 \Rightarrow \frac{NV}{NF}+1-\frac{NV}{2NF} = 1,2 \Rightarrow \frac{NV}{NF}-\frac{NV}{2NF} = 0,2 \Rightarrow \frac{NV}{NF}-\frac{1}{2}\frac{NV}{NF} = 0,2 \tag{3.5}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{NV}{NF} = 0,2 \Rightarrow \frac{NV}{NF} = 0,4 \Rightarrow NV = 0,4NF$

Substituindo 3.3.2 em 3.3, obtemos:

$$\frac{NV}{NF}+\frac{NA}{NV} = 1,2 \Rightarrow \frac{0,4NF}{NF}+\frac{NA}{NV} = 1,2 \Rightarrow 0,4+\frac{NA}{NV} = 0,2 \Rightarrow \frac{NA}{NV} = 0,8 \Rightarrow NA = 0,8NV \tag{3.6}$$

Se $NA+NV = 3600$, substituindo 3.6 nessa igualdade, segue que:

$$NA+NV = 3600 \Rightarrow 3600 \Rightarrow 0,8NV+NV = 3600 \Rightarrow 1,8NV = 3600 \Rightarrow NV = \frac{3600}{1,8} = 2000 \tag{3.7}$$

Substituindo o valor de $NV = 2000$ em , obtemos o valor de NF:

$$NV = 0,4NF \Rightarrow 2000 = 0,4NF \Rightarrow NF = \frac{2000}{0,4} = 5000 \tag{3.8}$$

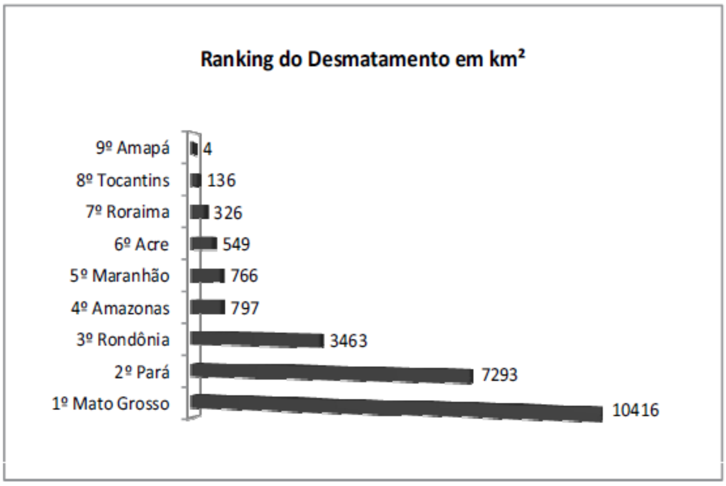
Alternativa: C

(ENEM 2010 - Q. 140 - Média)

Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônica Legal, integrada por nove estados.

Disponível em : www.folhaonline.com.br. Acesso em: 30 abr. 2010(adaptado).

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5 % em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre:



a) $100km^2$ e $900km^2$. b) $1000km^2$ e $2700km^2$. c) $2800km^2$ e $3200km^2$.

d) $3300km^2$ e $4000km^2$. e) $4100km^2$ e $5800km^2$.

Resolução: De acordo com o gráfico, o desmatamento médio (D_M), por estado, em 2004, foi, em Km^2, de:

$$D_{M(2004)} = \frac{4+136+326+549+766+3463+7293+10416}{9} \cong 2638,9$$

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre 2800 e 3200:

$$D_{M(2004)} = 1,105 D_{M(2004)} = 1,105 \times 2638,9 \cong 2916$$

Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 150 - Média)

A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: http://www.obmep.org.br. Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

a) 14,6 %. b) 18,2 %. c) 18,4 %.

d) 19,0 %. e) 21,0 %.

Resolução: De acordo com os dados do quadro, o percentual de medalhistas de ouro, na região Nordeste, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009, foi: 18%, 19%, 21%, 15% e 19%. Logo, o percentual médio de medalhistas de ouro nessa região é dado por:

$$\frac{18\% + 19\% + 21\% + 15\% + 19\%}{5} = \frac{92\%}{5} = 18,4\%$$

Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 170 - Média)

A tabela a seguir mostra a evolução da receita bruta anual nos três últimos anos de cinco microempresas (ME) que se encontram à venda.

ME	2009 (em milhares de reais)	2010 (em milhares de reais)	2011 (em milhares de reais)
Alfinetes V	200	220	240
Balas W	200	230	200
Chocolates X	250	210	215
Pizzaria Y	230	230	230
Tecelagem Z	160	210	245

Um investidor deseja comprar duas das empresas listadas na tabela. Para tal, ele calcula a média da receita bruta anual dos últimos três anos (de 2009 até 2011) e escolhe as duas empresas de maior média anual.

As empresas que este investidor escolhe comprar são:

a) Balas W e Pizzaria Y.

b) Chocolates X e Tecelagem Z.

c) Pizzaria Y e Alfinetes V.

d) Pizzaria Y e Chocolates X.

e) Tecelagem Z e Alfinetes V.

Resolução: De acordo com os dados do quadro, as médias das três ultimas receitas brutas das empresas V, W, X, Y e Z, em milhões de reais, são dadas, respectivamente, por:

Logo, as duas empresas de maior média anual nas três últimas receitas brutas são X e Y.

$$\bullet V = \frac{200+220+240}{3} = \frac{660}{3} = 220;$$

$$\bullet W = \frac{200+230+200}{3} = \frac{630}{3} = 210;$$

$\bullet X = \dfrac{250+210+215}{3} = \dfrac{675}{3} = 225;$

$\bullet Y = \dfrac{230+230+230}{3} = \dfrac{690}{3} = 230;$

$\bullet Z = \dfrac{160+210+245}{3} = \dfrac{615}{3} = 205;$

Logo, as duas empresas de maior média anual nas três últimas receitas brutas são X e Y.

Alternativa: D

(ENEM 2013 - Q. 148 - Média)

Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual.

O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa:

a) F. b) G. c) H.

d) M. e) P.

<u>Resolução</u>: De acordo com os dados do quadro, o lucro médio anual de cada uma das empresas F, G, H, M e P é, em milhões de reais, respectivamente, igual a:

$\bullet F : 24 \div 3 = 8;$

$\bullet G : 24 \div 2 = 12;$

$\bullet H : 25 \div 2,5 = 10;$

$\bullet M : 15 \div 1,5 = 10;$

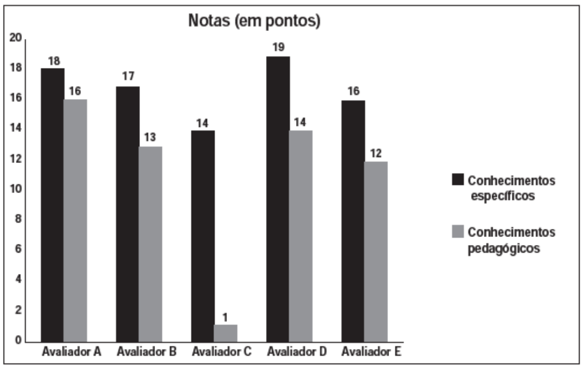
$\bullet M : 9 \div 1,5 = 6.$

Logo, a empresa que apresenta o maior lucro anual é a empresa G, sendo esta, então, a empresa que o empresário decidiu comprar.

Alternativa: B

(ENEM 2013 - Q. 157 - Média)

As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é:

a) 0,25 ponto maior. b) 1,00 ponto maior. c) 1,00 ponto menor.

d) 1,25 ponto maior. e) 2,00 ponto menor.

Resolução: De acordo com o gráfico, antes do descarte, a média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora era:

$$\frac{18+16+17+13+14+1+19+14+16+12}{10} = \frac{140}{10} = 14$$

Após o descarte da maior e da menor nota atribuídas ao professor, a média passou a ser:

$$\frac{18+16+17+13+14+14+16+12}{8} = \frac{120}{8} = 15$$

Logo, a nova média, em relação à média anterior, é 15–14 = 1 ponto menor.

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 150 - Média)

Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é:

a) 18.
b) 19.
c) 22.
d) 25.
e) 26.

Resolução: A nota final dos candidatos I e II são, respectivamente, iguais a:

$$\bullet I : \frac{4 \times 20 + 6 \times 26}{4+6} = \frac{218}{10} = 21,8;$$

$$\bullet III : \frac{4 \times 21 + 6 \times 18}{4+6} = \frac{192}{10} = 19,2;$$

Para que o candidato II vença a competição, sua nota deverá ser maior que a nota do candidato I (veja que a nota do candidato I é maior que a do candidato III), ou seja, a média ponderada das notas do candidato II deve ser maior que 21,8:

$$II : \frac{4 \times X + 6 \times 25}{4+6} > 21,8 \Rightarrow 4X + 150 > 218 \Rightarrow$$

$$4X > 218 - 150 \Rightarrow X > \frac{68}{4} \Rightarrow X > 17$$

Logo, a menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é 18.

Alternativa: A

(ENEM 2014 - Q. 155 - Média)

Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o:

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Resolução: A média dos resultados obtidos nos experimentos para cada um dos 5 reagentes é dada por:

$$\bullet 1: \frac{1+6+6+6+11}{5} = \frac{30}{5} = 6;$$

$$\bullet 2: \frac{0+6+7+6+5}{5} = \frac{24}{5} = 4,8;$$

$$\bullet 3: \frac{2+3+8+10+11}{5} = \frac{34}{5} = 6,8;$$

$$\bullet 4: \frac{2+4+7+8+12}{5} = \frac{33}{5} = 6,6;$$

$$\bullet 5: \frac{1+2+9+10+11}{5} = \frac{33}{5} = 6,6;$$

Logo, o reagente com a maior quantidade de resultados acima da média é o reagente 2, com quatro resultados acima de sua média.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 166 - Média)

Um concurso é composto por cinco etapas. candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cincos etapas. A classificação obedece á ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é :

a) A, B, C, E, D.
b) B, A, C, E, D.
c) C, B, E, A, D.
d) C, B, E, D, A.
e) E, C, D, B, A.

Resolução: Vamos detalhar o cálculo que determina a pontuação final do candidato A, buscando melhor compreensão do leitor para os demais cálculos.

Sejam n_1, n_2, n_3 e n_4 as notas pelo 1 candidato A nas etapas 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Logo, como a média das quatro primeiras notas do candidato A foi 9, de acordo com o quadro, segue que:

$$\frac{n_1+n_2+n_3+n_4}{4} \Rightarrow n_1+n_2+n_3+n_4 = 4.90$$

De acordo com o quadro, a pontuação do candidato A na quinta etapa foi 60. Logo, a média de suas notas nas cinco etapas é:

$$\frac{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5}{5} \Rightarrow \frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)+n_5}{5} = \frac{4.90+60}{5} = \frac{420}{5} = 84$$

Vamos, agora, determinar as demais pontuações finais de cada candidato.

- Candidato B: $\dfrac{4.85+85}{5} = 85$;
- Candidato C: $\dfrac{4.80+95}{5} = \dfrac{415}{5} = 83$;
- Candidato D: $\dfrac{4.60+90}{5} = \dfrac{330}{5} = 66$;
- Candidato E: $\dfrac{4.60+100}{5} = \dfrac{340}{5} = 68$;

Como a classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais, segue que a ordem de classificação final desse concurso é: B, A, C, E, D.

Alternativa: B

(ENEM 2016 - Q. 144 - Média)

Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1° mês: 21;
- 2° mês: 22;
- 3° mês: 25;
- 4° mês: 31;
- 5° mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é:

a) 156. b) 180. c) 192.

d) 264. e) 288.

Resolução: : A média mensal de vacinas aplicadas durante os cinco primeiros meses foi de:

$$\frac{21+22+25+31+21}{5}=\frac{120}{5}=24$$

Logo, do estoque inicial restaram $228-120=108$ vacinas. Então, de acordo com a política de reposição de estoque, o posto deve adquirir $12\times 24-108=288-108=180$ vacinas.

Alternativa: B

(ENEM 2016 - Q. 148 - Média)

Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito Aedes aegypti, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:
I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confimados.
II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.
Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

a) 59. b) 65. c) 68.

d) 71. e) 80.

Resolução: A média dos casos confirmados é dada por:

$$\frac{237+262+158+159+160+278+300+278}{8}=\frac{1832}{8}=229$$

Há 5 regiões em que o número de casos confirmados é maior que 229 e, nas demais regiões, o número de casos confirmados é menor que a média. Logo, de acordo com os critérios de distribuição dos funcionários feito pela prefeitura, ela deverá contratar: $5 \times 10 + 3 \times 7 = 50 + 21 = 71$.

Alternativa: D

(ENEM 2016 - Q. 167 - Média)

Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês:

a) I. b) II. c) III.

d) IV. e) V.

Resolução: A média dos lucros mensais, em milhões de reais, é de:

$$\frac{37+33+35+22+30+35+25}{7} = \frac{217}{7} = 31$$

Assim, nos dois meses subsequentes, a empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês V, que é o mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros nesse período de sete meses.

Alternativa: D

(ENEM 2016 - Q. 180 - Média)

A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26. b) 29. c) 30.

d) 31. e) 35.

Resolução: Seja x o lucro mensal no mês de junho. Calculando a média dos lucros no semestre, e considerando que esta deva ser, no mínimo, 30 (mil reais) para que o gerente permaneça no cargo, temos:

$$\frac{21+25+21+30+38+x}{6} \geq 30 \Rightarrow \frac{145+x}{6} \geq 30 \Rightarrow 145+x \geq 180 \Rightarrow x \geq 35$$

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 160 - Mediana)

Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe:

a) Teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.

b) Seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.

c) Seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.

d) Permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.

e) Empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

Resolução: Vamos ordenar as notas da equipe Gama para determinarmos a mediana: 0,0; 6,0; 6,5; 6,5; 7,0; 7,0; 8,0; 8,0; 10,0; 10,0. A mediana da sequência de notas acima é dada pela média aritmética entre as duas notas centrais, ou seja, as notas que ocupam as posições 5 e 6. No caso, estas notas são iguais a 7, logo, a mediana é dada por: $\frac{7,0+7,0}{2} = 7$.

Descartando a nota zero, as cinco menores notas da equipe Gama são 6,0; 6,5; 6,5; 7,0 e 7,0. Logo, a mediana alteraria a classificação se o aluno faltante obtivesse uma nota x tal que: $\frac{7,0+x}{2} > 7,6$, pois 7,6 é a nota da equipe Delta, 2ª colocada. De $\frac{7,0+x}{2} > 7,6$ obtemos $x > 8,2$. Se o aluno faltante obtivesse uma nota maior que 8,2, a 5º e a 6º nota seriam 7,0 e 8,0, o que resultaria em uma mediana igual a $\frac{7,0+8,0}{2} = \frac{15}{2} > 7,6$ e, então, a equipe Gama permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno faltante.

Alternativa: D

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2007
Novembro	R$ 73,10	2007
Dezembro	R$ 81,60	2007
Janeiro	R$ 82,00	2008
Fevereiro	R$ 85,30	2008
Março	R$ 84,00	2008
Abril	R$ 84,60	2008

(ENEM 2009 - Q. 167 - Mediana)

Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

a) R$ 73,10.
b) R$ 81,50.
c) R$ 82,00.
d) R$ 83,00.
e) R$ 85,30.

Resolução: Vamos ordenar em ordem crescente os valores das cotações mensais apresentados na tabela para determinarmos a mediana:

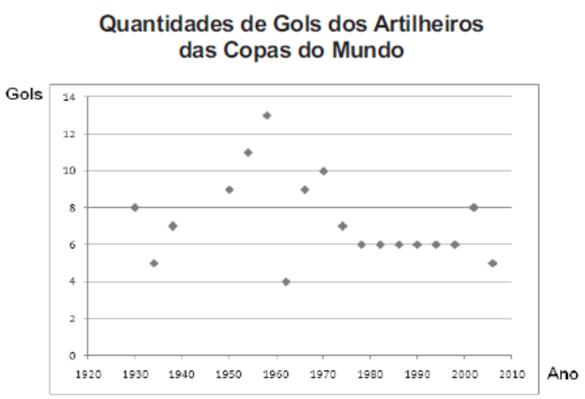
$$R\$73,10; R\$81,60; R\$82,00; R\$83,00 : R\$84,00 : R\$84,60 : R\$85,30.$$

A mediana é dada pelo termo que ocupa a posição central, no caso, R$ 83,00.

Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 167 - Mediana)

O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.



Disponível em: http://www.suapesquisa.com. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

a) 6 gols. b) 6,5 gols. c) 7 gols.

d) 7,3 gols. e) 8,5 gols.

Resolução: De acordo com o gráfico, a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo de 1930 a 2006 são, respectivamente, iguais a:

$$8; 5; 7; 9; 11; 13; 4; 9; 10; 7; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 8; 5.$$

Ordenando os valores acima em ordem crescente, obtemos a seguinte sequência:

$$4; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 11; 13.$$

Como a quantidade de elementos da sequência é um número par, 18, a mediana é dada pela média aritmética dos dois valores centrais, ou seja, os termos que ocupam as posições 9 e 10. Logo, a mediana é dada por:

$$\frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 175 - Mediana)

O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o Caged, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

a) 212 952. b) 229 913. c) 240 621.

d) 255 496. e) 298 041.

Resolução: De acordo com os dados do gráfico, os dez números de empregos formais surgidos no período de janeiro a outubro de 2010 são, em ordem crescente, iguais a:

$$181.419; 181.796; 204.804; 209.425; 212.952; 246.875; 266.415; 298.041; 299.415; 305.068.$$

Como a quantidade de elementos da sequência é um número par, 10, a mediana é dada pela média aritmética dos dois valores centrais, ou seja, os termos que ocupam as posições 5 e 6. Logo, a mediana é dada por:

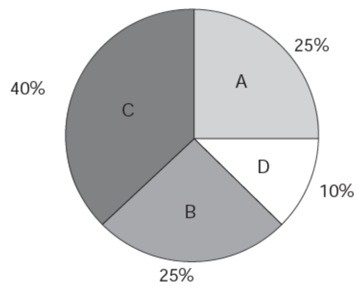
$$\frac{212.952 + 246.875}{2} = \frac{459.827}{2} = 229.913,5$$

Logo, o valor da parte inteira da mediana do número de empregos formais surgidos no período é 229.913.

Alternativa: B

(ENEM 2013 - Q. 150 - Mediana)

Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

a) R$ 300,00. b) R$ 345,00. c) R$ 350,00.

d) R$ 375,00. e) R$ 400,00.

Resolução: A partir dos dados do gráfico, vamos determinar a quantidade de hotéis que cobram cada uma das diárias A, B, C e D, respectivamente:

•A : 25% de 200 = 0,25 × 200 = 50 hotéis cobram a diária A, de R200,00;
•B : 25% de 200 = 0,25 × 200 = 50 hotéis cobram a diária A, de R300,00;
•C : 40% de 200 = 0,4 × 200 = 80 hotéis cobram a diária A, de R400,00;
•D : 10% de 200 = 0,1 × 200 = 20 hotéis cobram a diária A, de R600,00;

São 200 valores a serem ordenados em ordem crescente para determinarmos a mediana que, então, será dada pela média aritmética entre os termos que ocuparem as posições 100 e 101. Temos:

Logo, o valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é, em reais:

elementos centrais

$$\underbrace{200,\ldots,200}_{50 \text{ hotéis}},\ \underbrace{300,\ldots,300}_{50 \text{ hotéis}},\ \underbrace{400,\ldots,400}_{80 \text{ hotéis}},\ \underbrace{600,\ldots,600}_{20 \text{ hotéis}}.$$

$$\frac{300+400}{2} = \frac{700}{2} = 350$$

Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 170 - Mediana)

Os candidatos K, L, M, N e P estão disputando uma única vaga de emprego em uma empresa e fizeram provas de português, matemática, direito e informática. A tabela apresenta as notas obtidas pelos cinco candidatos.

Candidatos	Português	Matemática	Direito	Informática
K	33	33	33	34
L	32	39	33	34
M	35	35	36	34
N	24	37	40	35
P	36	16	26	41

Segundo o edital de seleção, o candidato aprovado será aquele para o qual a mediana das notas obtidas por ele nas quatro disciplinas for a maior.

O candidato aprovado será:

a) K. b) L. c) M.

d) N. e) P.

Resolução: Colocando em ordem crescente as quatro notas de cada candidato, a mediana é obtida pela média aritmética das duas notas centrais.

•Candidato K: 33, 33, 33, 34 ⇒ Mediana = $\dfrac{33+33}{2} = 33$;

•Candidato L: 32, 33, 34, 39 ⇒ Mediana = $\dfrac{33+34}{2} = 33,5$;

•Candidato M: 34, 35, 35, 36 ⇒ Mediana = $\dfrac{35+35}{2} = 35$;

•Candidato N: 24, 35, 37, 40 ⇒ Mediana = $\dfrac{35+37}{2} = 36$;

•Candidato O: 16, 26, 36, 41 ⇒ Mediana = $\dfrac{26+36}{2} = 31$;

Portanto, o candidato N foi o aprovado.

Alternativa: D

(ENEM 2015 - Q. 160 - Mediana)

Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é:

a) 20,70. b) 20,77. c) 20,80.

d) 20,85. e) 20,90.

Resolução: Colocando em ordem crescente os 8 tempos, em segundos, a mediana é obtida pela média aritmética das duas notas centrais, ou seja, dos termos que ocupam as posições 4 e 5. Em ordem, estes tempos são:

$$20,50; 20,60; 20,60; 20,80; 20,90; 20,90; 20,90; 20,96.$$

Portanto, a mediana é dada por: $\dfrac{20,80+20,90}{2} = \dfrac{41,7}{2} = 20,85$

Alternativa: D

(ENEM 2016 - Q. 150 - Moda)

Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

a) 2. b) 3. c) 4.

d) 5. e) 6.

Resolução: De acordo com os dados do quadro, o número de pessoas no térreo e nos andares 1, 2, 3, 4 e 5 são, respectivamente, 4, 5, 5, 5, 7 e 1. Logo, a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar é 5, pois este é o valor com maior frequência dentre os apresentados.

Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 175 - Média,mediana e moda)

O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:

a) $X = Y < Z$. b) $Z < X = Y$. c) $Y < Z < X$.

d) $Z < X < Y$. e) $Z < Y < X$.

Resolução: Vamos calcular a média (X), a mediana (Y) e a moda (Z) da distribuição apresentada para, então, compararmos seus valores.

•Note que a média é dada pela média aritmética ponderada:

$$x = \frac{5\times 0+3\times 1+4\times 2+3\times 3+2\times 4+2\times 5+1\times 7}{5+3+4+3+2+2+1} = \frac{0+3+8+9+8+10+7}{20} = \frac{45}{20} = 2,25$$

•Mediana: como a sequência do número de gols tem 20 elementos, a mediana é dada pela média aritmética simples entre os elementos de posição 10 e 11. Os primeiros elementos da sequência, em ordem crescente, são: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, **2, 2**, 2, ..., cujos termos de posição 10 e 11 são iguais a 2. Logo, a mediana é: $\frac{2+2}{2} = 2$.

•A moda (Z)é igual a 0, pois é o valor com maior frequência.

Logo, $Z < Y < X$.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 148 - Média,mediana e moda)

Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos.

As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a:

a) 17 °C, 17 °C e 13,5 °C. b) 17 °C, 18 °C e 13,5 °C. c) 17 °C, 13,5 °C e 18 °C.

d) 17 °C, 18 °C e 21,5 °C. e) 17 °C, 13,5 °C e 21,5 °C.

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

x_i	13,5	14	15,5	16	18	18,5	19,5	20	21,5
f_i	4	1	1	1	2	1	1	3	1

Resolução: De acordo com os dados do quadro, podemos montar a seguinte tabela de frequências:

Agora, de acordo com a tabela acima, vamos determinar:

•Média:

$$\frac{4\times 13,5+1\times 14+1\times 15,5+1\times 16+2\times 18+1\times 18,5+1\times 19+3\times 20+1\times 21,5}{4+1+1+1+2+1+1+3+1}$$

$$\frac{54+14+15,5+16+36+18,5+60+21,5}{15}$$

$$\frac{255}{17}=17$$

•Mediana: A mediana corresponde ao valor do 8º termo, então, mediana vale 18;

•A moda é 13,5, pois este é o valor com maior frequência.

Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 161 - Média,mediana e moda)

Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor:

a) Branca e os de número 38.

b) Branca e os de número 37.

c) Branca e os de número 36.

d) Preta e os de número 38.

e) Preta e os de número 37.

Resolução: Como a moda representa o valor que aparece com maior frequência, a numeração que apresentou mais defeitos foi a 38. Então as únicas alternativas possíveis são as apresentadas nas letras A e D.

Como a média da distribuição da distribuição de "zeros" (cor branca) e "uns" (cor preta) foi 0,45<0,5, segue que houve mais "zeros" do que "uns", pois a média está mais próxima de 0 do que de 1. Portanto, a loa encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor branca e os de número 38.

Alternativa: A.

3.3.3 Medidas de dispersão

(ENEM 2010 - Q. 171 - Média,mediana e desvio padrão)

Marcos e Paulo foram classificados em um concurso. Para classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos. Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é:

a) Marco, pois a média e a mediana são iguais.

b) Marco, pois obteve menor desvio padrão.

c) Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português.

d) Paulo, pois obteve maior mediana.

e) Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

Resolução: Marco e Paulo tiveram médias iguais, porém, o desvio padrão de Marco é menor, o que significa que suas notas nas provas estão mais próximas da média do que as notas de Paulo. Desta forma, as notas de Marco são mais regulares (têm desvio padrão menor) e, portanto, ele foi mais bem classificado.

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 172 - Variança e desvio padrão)

Em 2006, a produçaõ mundial de etanol foi de 40 bilhões de litros e a de biodiesel, de 6,5 bilhões. Neste mesmo ano, a produção brasileira de etanol correspondeu a 43 % da população mundial, ao passo que a produção dos Estados Unidos da América,usando milho, foi de 45 %.

Disponível em: planetasustentavel.abril.com.br. Acesso em: 02 maio 2009.

Considerando que, em 2009, a produção mundial de etanol seja a mesma de 2006 e que os Estados Unidos produzirão somente a metade de sua produção de 2006,para que o total produzido pelo Brasil e pelos Estados Unidos continue correspondendo a 88% da produção mundial, o Brasil deve aumentar sua produção em, aproximadamente,

a) 22,5 %.
b) 50,0 %.
c) 52,3 %.
d) 65,5 %.
e) 77,5 %.

Resolução: Para determinarmos a variância das produções dos talhões em $(sacas/hectare)^2$, vamos colocar o desvio padrão em sacas/hectare:

•desvio padrão=90kg/talhão, como os talhões têm a mesma área de 30.000m^2, obtemos $\dfrac{90kg}{30.000m^2} = \dfrac{30kg}{10.000m^2}$ = 30kg/hectare e, como cada saca tem 60kg, segue que: desvio padrão= $\dfrac{30kg}{60m^2}$ =/hectare=0,5 saca/hectare.

Portanto, a variância, que é dada pelo quadrado do desvio padrão, expressa em $(sacas/hectare)^2$, é: $(0,5saca/hectare)^2 = 0,25(sacas/hectare)^2$.

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 141 - Desvio padrão)

O procedimento de perda rápida de "peso"é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quantos aos "pesos". As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Após as três "pesagens", os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas:

a) I e III.
b) I e IV.
c) II e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Resolução: O atleta mais regular quanto ao peso é aquele que possui o menor desvio padrão (4,08), portanto o atleta III. O atleta menos regular quanto ao peso é aquele que possui o maior desvio padrão (8,49), portanto o atleta II. Logo, a primeira luta ocorrerá entre os atletas II e III.

Alternativa: C

CAPÍTULO 4

Geometria

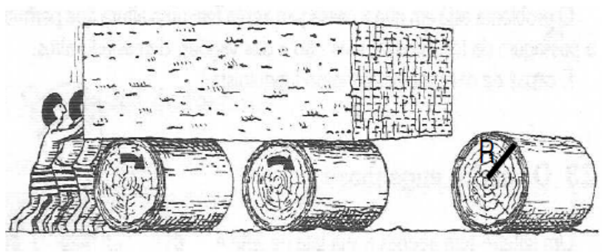
Neste Capítulo destacamos a porcentagem significativa de questões de Geometria Espacial, 43%. Acreditamos que esse elevado número possa dever-se ao fato de, ao trabalhar Geometria Espacial, muitos conceitos de Geometria Plana são necessários, ou seja, estes estão indiretamente e intimamente envolvidos em questões de Geometria Espacial.

4.1 Geometria Plana

4.1.1 Comprimento/Perímetro

(ENEM 2010 - Q. 165 - Circunferência)

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



BOLT, Brian. **Atividades matemáticas**.Ed.Gradiva.

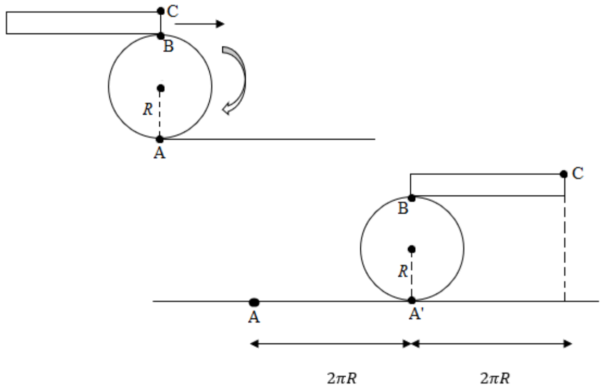
Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é:

a) $y = \mathrm{R}$.　b) $y = 2\ \mathrm{R}$.　c) $y = \pi\mathrm{R}$.

d) $y = 2\pi\mathrm{R}$.　e) $y = 4\pi\mathrm{R}$.

Resolução: Considerando que o rolo seja um cilindro perfeito, então ele tem como base um círculo e, neste caso, uma volta completa do rolo é como esticar a circunferência da base do rolo sobre o solo, o que corresponde ao comprimento da circunferência. Logo, o deslocamento da tora em relação ao solo é $2\pi\mathrm{R}$.

Notemos que, enquanto o rolo dá uma volta sobre o solo, o bloco corre, sobre o rolo, a mesma distância da volta, ou seja, o deslocamento da tora em relação à tora também é de 2πR.

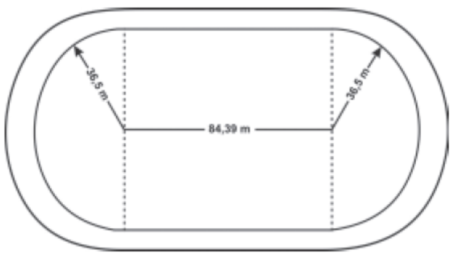


Logo, o deslocamento y pedido é dado por: $2\pi R + 2\pi R = 4\pi R$.

Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 170 - Circunferência)

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S.**Modelação Matemática como métodos de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1° e 2° graus.** 1990. Dissertição de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990(adaptado).

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

a) 1. b) 4. c) 5.

d) 7. e) 8.

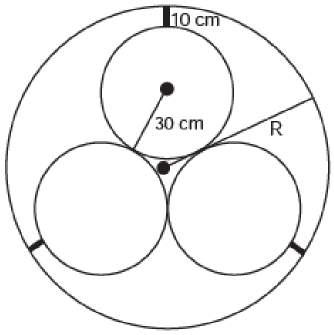
Resolução: De acordo com a imagem da pista de atletismo, vemos que uma volta completa é composta de dois segmentos de reta, cada um medindo 84,39m, e mais duas metades de circunferências de mesmo raio, ou seja, uma circunferência completa. Logo, o comprimento total, em metros, de uma volta completa de pista, cujos arcos de circunferências têm raio R, em metros, é dado por: $2 \times 84{,}39 + 2\pi R$.

Assim, se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, o corredor estaria sendo beneficiado se estivesse na raia 1, que tem o menor valor para R.

Alternativa: A

(ENEM 2013 - Q. 178 - Circunferências e tangência)

Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida *R*. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal,conforme a figura:



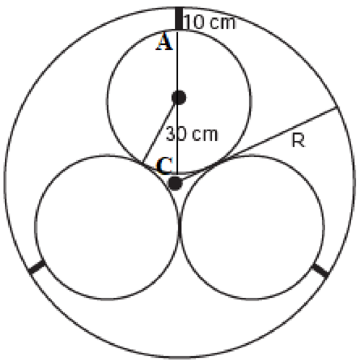
Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de R, em centímetro, é igual a:

a) 64,0. a) 65,5. c) 74,0.

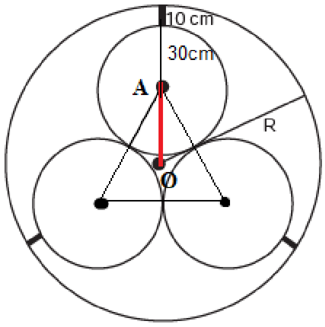
a) 81,0. a) 91,0.

Resolução: Analisando as alternativas e a imagem abaixo, podemos conjecturar que a resposta correta seja a da alternativa C. Veja:

• 18R é dado pela soma dos 10cm mais a distância entre os pontos A e C, que representa o diâmetro da circunferência menor (60cm) mais a pequena distância (d) entre C e o centro da circunferência maior: 10 + 60 + d = 70 + d.



Vamos fazer os cálculos para verificar se a conjectura acima está correta. Determinando os centros das três circunferências menores e ligando-os, obtemos um triângulo equilátero de lado 60cm. Dessa forma, o centro da circunferência maior, que denotaremos por O, corresponde ao circuncentro (ponto de interseção das três alturas em um triângulo) do triângulo equilátero obtido. Vemos, na imagem seguinte, que R é dado pela soma de 10 cm + 30 cm + a medida do segmento AO. Este segmento (AO) corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo equilátero, que é dada por $h = \frac{1\sqrt{3}}{2}$, sendo l o lado do triângulo.

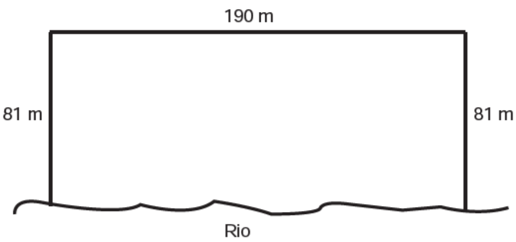


Logo: $R = 10 + 30\frac{2}{3}.\frac{60\sqrt{3}}{2} = 40 + 20\sqrt{3} = 40 + 20x1,7 = 40 + 34 = 74.$

Alternativa: C

(ENEM 2013 - Q. 152 - Quadriláteros)

Para o reflorestamento de uma área, deve-se cercar totalmente, com tela, os lados de um terreno, exceto o lado margeado pelo rio, conforme a figura. Cada rolo de tela que será comprado para confecção da cerca contém 48 metros de comprimento.



A quantidade mínima de rolos que deve ser comprada para cercar esse terreno é:

a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 11.
e) 12.

Resolução: Os lados do terreno a serem cercados totalizam:

$$(81 + 190 + 81)\text{m} = 352 \text{ m}.$$

Como cada rolo tem 48m de comprimento, serão necessários, no mínimo:

$$\frac{352}{48} = 7,33..$$

Ou seja, a quantidade mínima de rolos de tela que deve ser comprada para cercar esse terreno é 8.

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 163 - Quadriláteros)

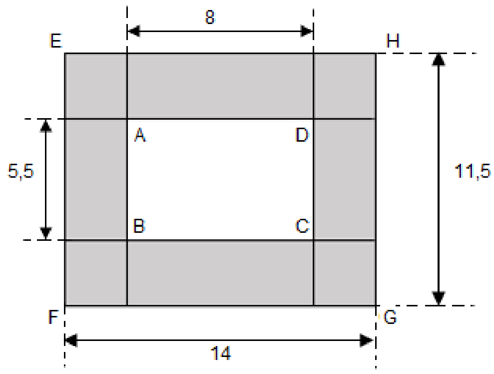
Uma pessoa possui um espaço retangular de lados 11,5 m e 14 m no quintal de sua casa e pretende fazer um pomar doméstico de maçãs. Ao pesquisar sobre o plantio dessa fruta, descobriu que as mudas de maçã devem ser plantadas em covas com uma única muda e com espaçamento mínimo de 3 metros entre elas e entre elas e as laterais do terreno. Ela sabe que conseguirá plantar um número maior de mudas em seu pomar se dispuser as covas em filas alinhadas paralelamente ao lado de maior extensão.

O número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é:

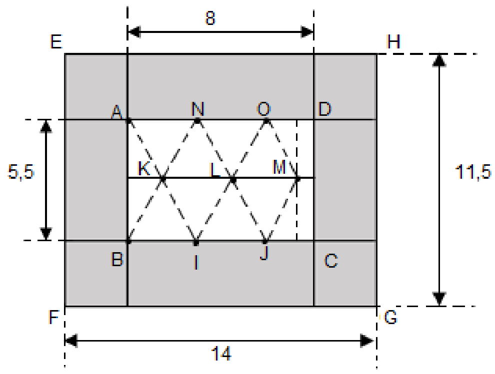
a) 4. b) 8. c) 9.

d) 12. e) 20.

<u>Resolução</u>: Na figura seguinte, EFGH representa o espaço retangular que será utilizado para o plantio. Considerando que as mudas devem ser plantadas em covas que estejam a $3m$ das laterais, nenhuma muda poderá ficar fora do retângulo ABCD.



Considerando que a pessoa deseja plantar o maior número de mudas possível, que estas deverão ter uma distância de, no mínimo, 3m uma da outra e que que as covas deverão estar em filas alinhadas paralelamente ao lado maior da extensão, as mudas poderão ser plantadas nos pontos A, N, O, K, L, M, B, I e J, da figura seguinte.



Logo, o número máximo de mudas que essa pessoa poderá plantar no espaço disponível é 9. É possível verificarmos que a distância entre as mudas é de, no mínimo, $3m$ uma da outra:

•Como a medida de AD, assim como de BC, é 8, é possível obter 3 pontos alinhados nestes segmentos cujas distâncias sejam, no mínimo, $3m$. Com o mesmo raciocínio, vemos que as distâncias entre K e L e entre L e M também são maiores ou iguais a 3;

•Consideremos, agora, o triângulo retângulo ABI. Vamos determinar a medida de AI:

$$(\overline{AI})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BI})^2 = 5,5^2 + 3^2 = 30,25 + 9 = 39,25 \Rightarrow AI = \sqrt{39,25} \cong 3,13.$$

Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 162 - Quadriláteros e circunferência)

O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes,de raios de mesma medida.

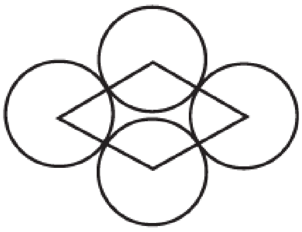


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

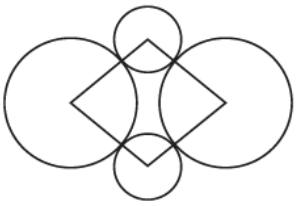


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de:

a) 300%.
b) 200%.
c) 150%.
d) 100%.
e) 50%.

Resolução: Seja r o raio das circunferências na figura 1. Então o perímetro do losango, em função de r, da figura 1, é $r + r + r + r + r + r + r + r = 8r$. Na figura 2, ao dobrar o raio de duas das circunferências, estas passam a ter raios r e $2r$. Logo, o perímetro do losango, na figura 2, é r+r+2r+2r+r+r+2r+2r=12r.

Assim, o aumento do perímetro da figura 1 para a figura 2 foi de $4r$, o que corresponde a um aumento de 50% em relação a $8r$.

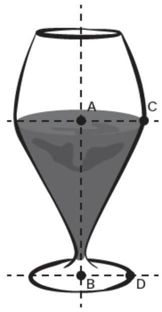
Geometria e porcentagem

Esta é uma questão que também pode ser trabalhada no contexto de porcentagem, desde que os alunos já tenham conhecimento do conceito de perímetro.

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 171 - Quadriláteros e circunferência)

Um restaurante utiliza, para servir bebidas, bandejas com bases quadradas. Todos os copos desse restaurante têm o formato representado na figura:



Considere que $AC = \frac{7}{5}BD$ e que l é a medida de um dos lados da base da bandeja. Qual deve ser o menor valor da razão $\frac{l}{BD}$ para que uma bandeja tenha capacidade de portar exatamente quatro copos de uma só vez?

a) 2.

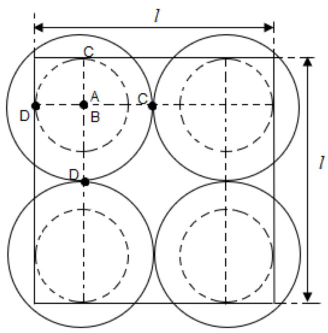
b) $\frac{14}{5}$.

c) 4.

d) $\frac{24}{5}$.

e) $\frac{28}{5}$.

Resolução: Para que o lado da bandeja quadrada tenha o menor valor possível comportando exatamente 4 copos de uma vez, esses devem estar tangentes lado a lado dois a dois, de modo que a base do copo tangencie dois lados da bandeja.



O lado l da bandeja é igual à duas vezes a medida do raio da base do copo (BD) mais duas vezes a medida do raio da circunferência maior do copo (AC):

$$l = 2\overline{BD} + 2\overline{AC} = 2\overline{BD} + 2.\frac{7}{5}.\overline{BD} = \frac{10+14}{5}.\overline{BD} = \frac{24}{5}.\overline{BD}.$$

Logo:

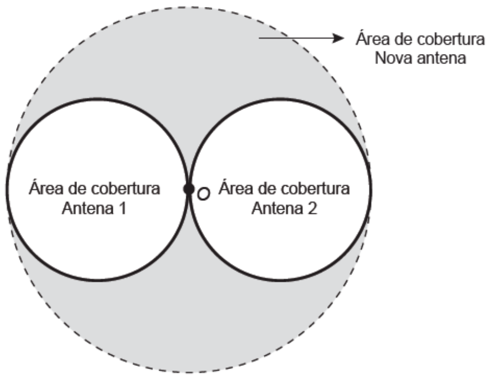
$$\frac{l}{\overline{BD}} = \frac{\frac{24}{5}.\overline{BD}}{\overline{BD}} = \frac{24}{5}.$$

Alternativa: C

4.1.2 Área

(ENEM 2015 - Q. 151 - Circulos)

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores. Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

a) 8π. b) 12π. c) 16π.

d) 32π. e) 64π.

Resolução: A área coberta das antenas antigas é dada por: $2\pi.2^2 = 8\pi km^2$. Já a área coberta pela nova antena é: $\pi.4^2 = 16\pi km^2$. Logo, com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em: $16\pi - 8\pi = 8\pi$.

Alternativa: A

(ENEM 2009 - Q. 141 - Quadriláteros)

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = BC/2$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = AB/5$ é lado do quadrado.

Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele:

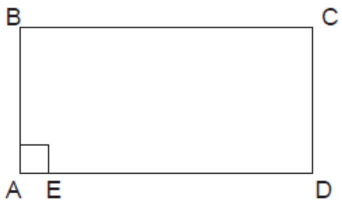
a) Duplicasse a medida do lado do quadrado .

b) Triplicasse a medida do lado do quadrado .

c) Triplicasse a área do quadrado .

d) Ampliasse a medida do lado do quadrado em 4% .

e) Ampliasse a área do quadrado em 4%.



Resolução: Vamos indicar a medida do segmento AB por x. Nesse caso, os lados do retângulo ABCD passam a ser indicados por x = AB e BC = 2AB = 2x e, então, a área total do terreno é dada por:

$$x.2x = 2x^2.$$

Como as famílias devem construir suas residências deixando, no mínimo, 94% da área do terreno para preservação ambiental, segue que as famílias podem construir em, no máximo, 6% da área do terreno, o que corresponde a:

$$6\% \text{ de } 2x^2 = \frac{6}{100}.2x^2 = 0,12x^2.$$

O quadrado demarcado por Antônio tem área:

$$AE.AE = \frac{AB}{5}.\frac{AB}{5} = (\tfrac{AB}{5})^2 = \frac{x^2}{25} = 0,4x^2.$$

Logo, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele triplicasse a área do quadrado.

Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 168 - Quadriláteros)

O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

biomas continentais brasileiros	área aproximada (km^2)	área / total Brasil
Amazônia	4.196.943	49,29%
Cerrado	2.036.448	23,92%
Mata Atlântica	1.110.182	13,04%
Caatinga	844.453	9,92%
Pampa	176.496	2,07%
Pantanal	150.355	1,76%
Área Total Brasil	8.514.877	

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 10 jul. 2009 (adaptado).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com as medidas de 120 m x 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

a) 1 400. b) 14 000. c) 140 000.

d) 1 400 000. e) 14 000 000.

Resolução: A área de um campo de futebol, em m^2, é igual a:

$$120 \times 90 = 10800$$

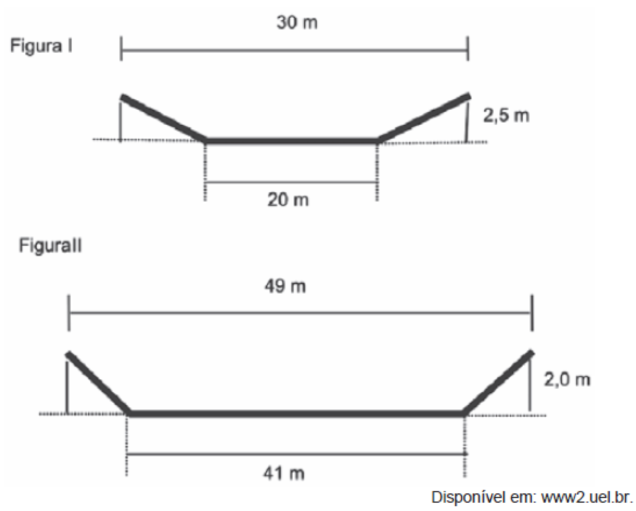
De acordo com o quadro, a área aproximada do bioma Pantanal é $150355km^2$, o que corresponde a $150335 \times 10^6 m^2$. Logo, o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal é dado por:

$$\frac{150335 \times 10^6}{10800} \cong 13,9 \times 10^6 \cong 14000000.$$

Alternativa: E

(ENEM 2009 - Q. 169 - Quadriláteros)

A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de $1.050m^3/s$. O cálculo da vazão, Q em m^3/s, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em m^2, pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, Q = Av. Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.



Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

a) $90m^3/s$. b) $750m^3/s$. c) $1050m^3/s$.

d) $1512m^3/s$. e) $2009m^3/s$.

Resolução: A área do trapézio da figura 1, em m^2, é:

$$\frac{(30+20).2,5}{2}=62,5.$$

Como a vazão Q vale $1050m^3/s$, segue que a velocidade da água é de:

$$Q=Av\Rightarrow v=\frac{Q}{A}\Rightarrow v=\frac{1050}{62,5}=16,8m/s.$$

Com a reforma na canaleta, a área do trapézio, com dimensões especificadas na figura 2, em m^2, é:

$$Q=Av=90.16,8=1512m^3/s.$$

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 142 - Quadriláteros)

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça.A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

a) 1. b) 2. c) 3.
d) 4. e) 5.

Resolução: Vamos calcular o perímetro (em m) de cada terreno e, para os que tiverem, no máximo 180 m, que corresponde à quantidade máxima de tela que poderá ser comprada devido às restrições orçamentárias da prefeitura, vamos determinar a área e, então analisarmos qual é maior.

•Terreno 1: perímetro = 55 + 55 + 45 + 45 = 200 > 180;

•Terreno 2: com uma das dimensões do terreno 2 é maior que uma das dimensões do terreno 1, que possui perímetro maior que 180, certamente o perímetro do terreno 2 também será maior que 180, logo, poderíamos não fazer este cálculo. Apenas para confirmar, vejamos: perímetro $=55+55+55+55=220>180$;

•Terreno 3: perímetro $=60+60+30+30=180, área=60.30=1800m^2$;

•Terreno 4: perímetro $=70+70+20+20=180.Área=70.20=1400m^2$;

•Terreno 5: idem ao observado para o terreno 2. Logo, para optar pelo terreno de maior área, que atenda às condições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno 3.

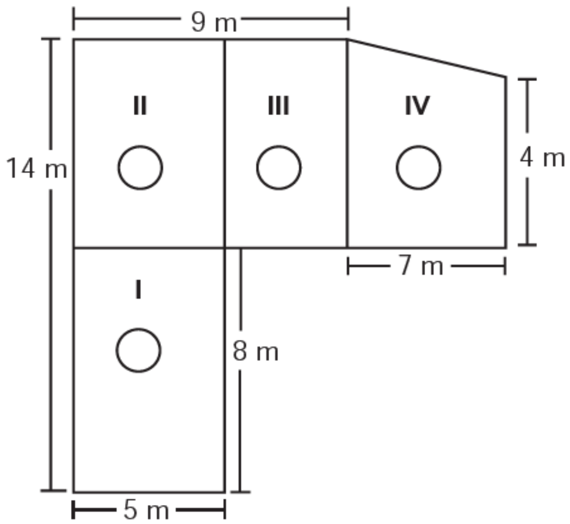
Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 148 - Quadriláteros)

Jorge quer instalar aquecedores no seu salãode beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de doistipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre $35m^2$ de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre $45m^2$ de área.

O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás.

A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários:

a) Quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.

b) Três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.

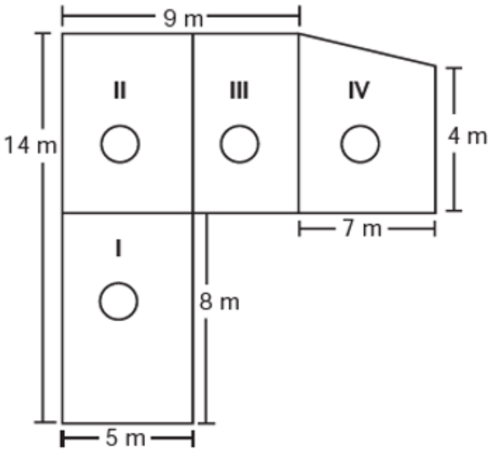
c) Duas unidades do tipo A e duas do tipo B.

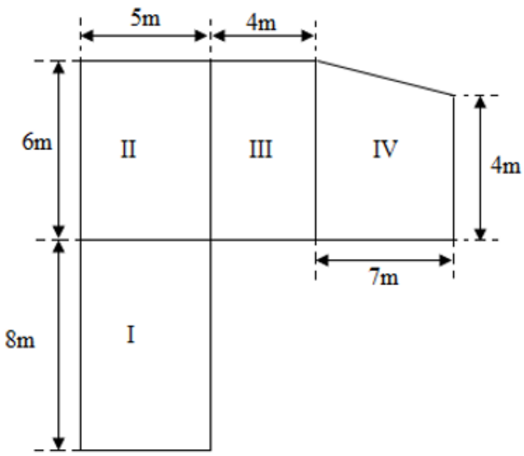
d) Uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.

e) Nenhuma unidade do tipo A e quatro do tipo B.

Resolução: A partir da imagem da planta, vamos determinar as medidas de cada ambiente para, então, calcularmos a área de cada um deles.

Sejam $A_I, A_{II}, A_{III} e A_{IV}$ as áreas, em m^2, dos respectivos ambientes I, II, III e IV (admitindo-se que o trapézio seja retângulo), então:





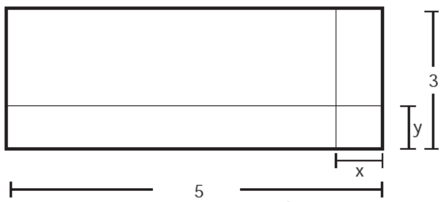
•$A_I = 8x5 = 40$;
•$A_{II} = 6x5 = 30$;
•$A_{III} = 6x4 = 24$;
•$A_{VI} = \dfrac{(6+4)x7}{2} = 35$.

Como o fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura e Jorge quer gastar o mínimo possível com gás, para os ambientes II e III, ele pode adquirir dois aquecedores do tipo A, que cobre $35m^2$. Já para os outros dois ambientes, Jorge terá de adquirir dois aquecedores do tipo B, que cobre $45m^2$.

Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 151 - Quadriláteros)

Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura.A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5–x)(3–y)$.



Nestas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) $2xy$ b) $15-3x$ c) $15-5y$

d) $-5y-3x$ e) $5y+3x-xy$

Resolução: De acordo com a figura, a área inicial do forro é:

$$5 \times 3 = 15.$$

De acordo com o enunciado, após a primeira lavagem, a área do forro passa a ser:

$$(5-x)(3-y)$$

o que corresponde a:

$$(5-x)(3-y) = 15 - 5y - 3x + xy.$$

A área perdida do forro, após a primeira lavagem, é dada pela diferença entre a área inicial e a área após a lavagem, ou seja:

$$15 - (15 - 5y - 3x + xy) = 15 - 15 + 5y + 3x - xy = 5y + 3x - xy.$$

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 144 - Quadriláteros)

Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada.

A quantidade x, de placas do novo modelo, em cada nova caixa será igual a:

a) $\dfrac{N}{9}$ b) $\dfrac{N}{6}$ c) $\dfrac{N}{3}$

d) $3N$ e) $9N$

Resolução: Resolução: A área de cada placa quadrada cujos lados medem y cm é $y^2 cm^2$. Como inicialmente eram vendidas N unidades, o que cobria uma área S, segue que: $S = N.y^2$.

Como a fábrica triplicou a medida dos lados das placas, essa passou a ser 3y, e a área, $(3y)^2 = 9y^2$. Seja X o número de placas do novo modelo. Como essas novas placas serão reunidas em uma caixa de mesma área S, então:

$$9y^2.X = S = N.y^2 \Rightarrow$$

$$9y^2.X = N.y^2 \Rightarrow$$

$$X = \frac{N.y^2}{9y^2} = \frac{N}{9}$$

Alternativa: A

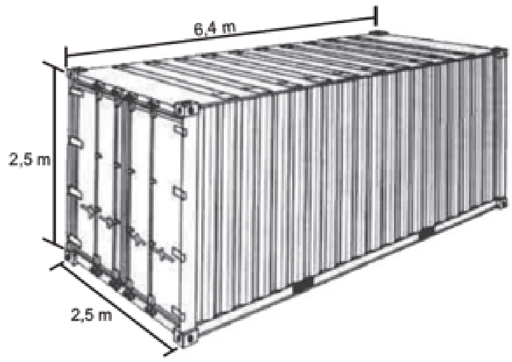


Figura 1

Figura 2

(ENEM 2015 - Q. 143 - Quadriláteros)

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1 (acima), deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10 m por 32 m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2) (acima).

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada.

Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é:

a) 12,5 m.
b) 17,5 m.
c) 25,0 m.
d) 22,5 m.
e) 32,5 m.

Resolução: Vamos, inicialmente, determinar quantos contêineres formaram cada "camada". Vejamos que:

$$\frac{32}{6,4} = 5;$$

$$\frac{10}{2,5} = 4.$$

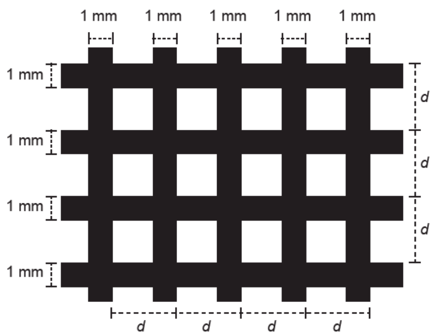
Logo, cada "camada", na área de armazenamento, comporta 5×4=20 contêineres.

Para armazenar 100 contêineres, serão necessárias (e suficientes), 100÷20=5 "camadas". E, então, após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres é: $5.2,5m = 12,5m$.

Alternativa: A

(ENEM 2015 - Q. 145 - Quadriláteros)

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente. Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de (d-1)milímetros, conforme a figura. O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente ás bordas do vidro.

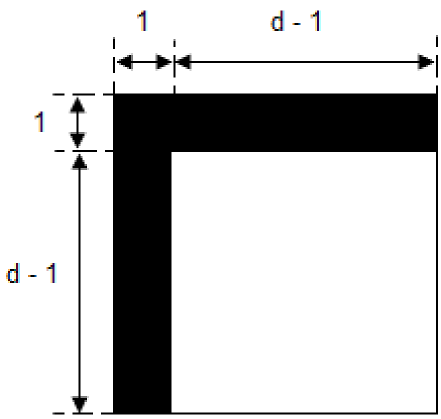


Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento. A medida de *d*, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

a) 2. b) 1. c) $\frac{11}{3}$.

d) $\frac{4}{3}$. e) $\frac{2}{3}$

Resolução: Para cada interseção de fitas (uma horizontal e outra vertical), existe uma área quadrada descoberta, de medida *d - 1* e uma área coberta. A combinação dessas duas áreas determina a área total. Repare que o tamanho do vidro apenas definirá a quantidade de vezes que esse padrão será repetido.



De acordo com a imagem acima, temos:
•Área total: d^2;
•Área coberta: $d^2 - (d-1)^2 = d^2 - (d^2 - 2d + 1) = d^2 - d^2 + 2d - 1 = 2d - 1$

Como a taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, segue que esta é dado por:

$$\frac{área\ coberta}{área\ total} = \frac{2d-1}{d^2}$$

Para que a taxa de cobertura da malha seja de 75%, a razão acima deve ser igual a 0,75:

$$\frac{2d-1}{d^2} = 0,75 \Rightarrow \frac{2d-1}{d^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$3d^2 = 8d - 4 \Rightarrow 3d^2 - 8d + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Como em d é colocada uma fita de 1mm, segue que d deve ser maior que 1, ou seja, d = 2mm.

Poderíamos ter feito o cálculo considerando a taxa de não cobertura do vidro:

•Área total: d^2;

•Área descoberta: $(d-1)^2$.

Como a taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, segue que a taxa de não cobertura é o percentual da área descoberta, ou seja:

$$\frac{área\ descoberta}{área\ total} = \frac{(d-1)^2}{d^2} = (\frac{d-1}{d})^2$$

Para que a taxa de cobertura da malha seja de 75%, a taxa de não cobertura é de 25%, logo:

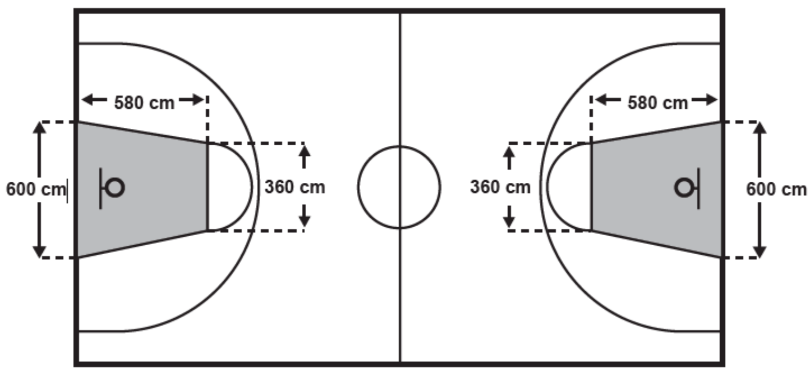
$$(\frac{d-1}{d})^2 = 0,25 \Rightarrow (\frac{d-1}{d})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{d-1}{d} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2d - 2 = d \Rightarrow d = 2.$$

Alternativa: A

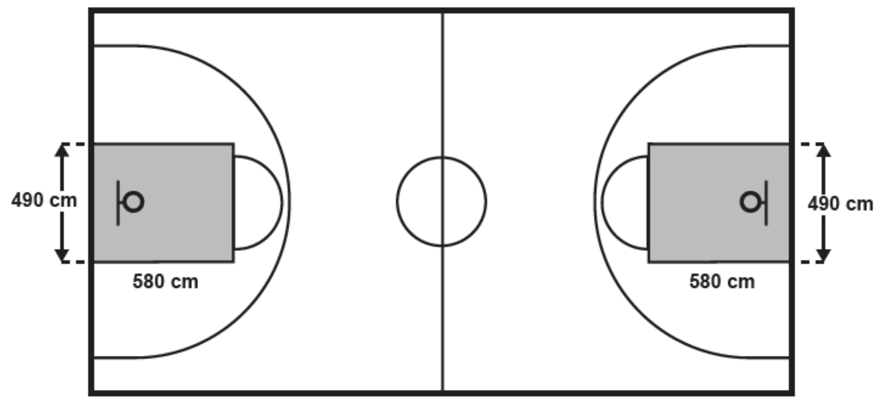
(ENEM 2015 - Q. 161 - Quadriláteros)

O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

modificação das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

a) Aumento de 5 800 cm^2.

b) Aumento de 75 400 cm^2.

c) Aumento de 214 600 cm^2.

d) Diminuição de 63 800 cm^2.

e) Diminuição de 272 600 cm^2

Resolução: A área do trapézio do esquema I, em cm^2, é:

$$\frac{(600+360)\times 580}{2} = \frac{960\times 580}{2} = 480\times 580 = 278\,400$$

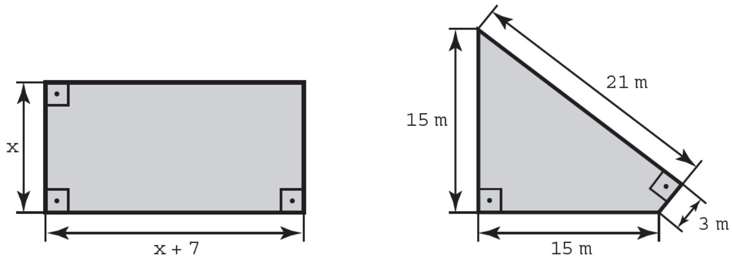
Com as modificações, os garrafões passaram a ter o formato de retângulos de dimensões 490 cm ×580cm, então, a área do retângulo do esquema II, em cm^2, é:

$$490\times 580 = 284\,200$$

Logo, após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área, em cm^2, ocupada por cada garrafão, que corresponde a um aumento de:

$$284\,200 - 278\,400 = 5\,800.$$

Alternativa: A



(ENEM 2016 - Q. 166 - Quadriláteros e triângulos)

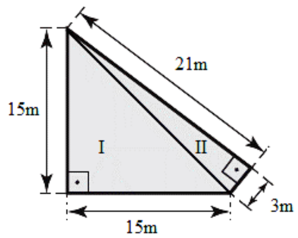
Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho.Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional(como se observa na figura B acima), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma empresa que quer construir, mas, para isso precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A acima) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5. b) 9,0 e 16,0. c) 9,3 e 16,3.

d) 10,0 e 17,0. e) 13,5 e 20,5.

Resolução: Sejam A_I e A_{II} as áreas, respectivamente, das regiões I e II da figura abaixo, então a área total do terreno do filho mais velho é dado pela soma de A_I e A_{II}.



$$A = A_I + A_{II} = \frac{15 \times 15}{2} + \frac{3 \times 21}{2} = \frac{225 + 63}{2} = \frac{288}{2} = 144m^2$$

As áreas dos terrenos dos filhos devem ser iguais. Como a área do terreno do filho mais novo é dada por x(x+7), segue que:

$$x(x+7) = 144 \Rightarrow$$

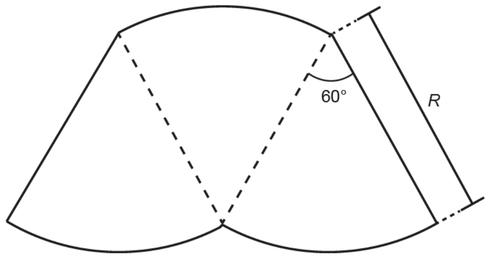
$$x^2 + 7x - 144 = \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 \\ x_2 = -16(não serve) \end{cases}$$

Assim, para x = 9m, as dimensões do terreno retangular são 9m e 9 + 7 = 16m.

Alternativa: B
A rigor, o comprimento e a largura são, respectivamente, iguais a 16m e 9m.

(ENEM 2015 - Q. 171- Setor circular e quadriláteros)

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões$50m \times 24m$.

O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π. O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

a) 16.
b) 28.
c) 29.
d) 31.
e) 49.

Resolução: Como o proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente, segue que:

$$3 \times A_{setor} < A_{retângulo} \Rightarrow$$

$$3 \times \frac{1}{2}\alpha R^2 < 50x24, \text{ sendo } \alpha \text{ o ângulo central do setor circular.}$$

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3} R^2 < 1200 \Rightarrow$$

$$3 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} R^2 < 1200 \Rightarrow$$

$$\frac{3}{2} R^2 < 1200 \Rightarrow$$

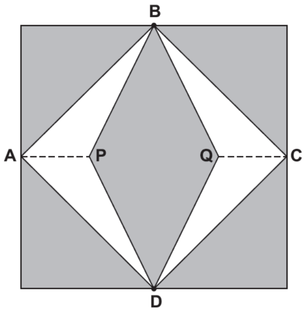
$$R^2 < 800 \Rightarrow R = 28, \text{ pois } 28^2 < 800 < 29^2$$

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 149- Triângulos)

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem $frac14$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa $R\$30,00$ o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB),que custa $R\$50,00$ o m^2. De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

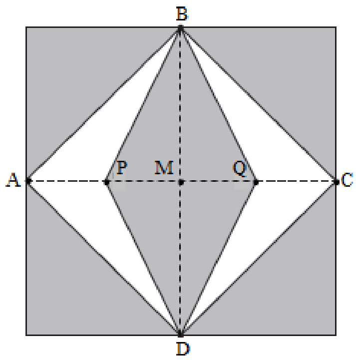


a) R$ 22,50. b) R$ 35,00. c) R$ 40,00.

d) R$ 42,50. e) R$ 45,00.

Resolução: De acordo com os dados do enunciado, os triângulos ABP, ADP, BCQ e DCQ são congruentes, ou seja, possuem mesma área. Então, para determinarmos a área da parte mais clara (A_c), iremos fazer 4 vezes a área do triângulo APB.

Seja M o centro do quadrado de lado 1m, conforme figura abaixo. Então:



$$A_c = 4 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{MB}}{2} = 4 \times \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} m^2$$

A área da região sombreada (A_S) é igual à área do quadrado menos a área da parte mais clara, ou seja:

$$A_S = 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} m^2$$

Logo, o custo (C) dos materiais usados na fabricação de um vitral, em reais, é:

$$C = \frac{1}{4}.50 + \frac{3}{4}.30 = 12,50 + 22,50 = 35$$

Alternativa: B

(ENEM 2012 - Q. 177)

Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sia massa m pela fórmula $A = k.m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt[3]{16}$. b) 4. c) $\sqrt{24}$.

d) 8. e) 64.

Resolução:Sejam A_i e A_M as áreas da superfície corporal de uma pessoa na infância e na maioridade, dessa mesma pessoa, respectivamente. De acordo com o enunciado, segue que:

$\bullet A_i = k.m^{\frac{2}{3}}$ $\bullet A_M = k.(8m)^{\frac{2}{3}} = k.8^{\frac{2}{3}}.m^{\frac{2}{3}} = k.\sqrt[3]{8^2}.m^{\frac{2}{3}} = k.4.m^{\dfrac{2}{3}} = 4.k.m^{\frac{2}{3}}$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:

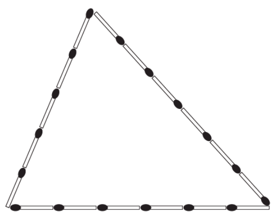
$$A_M = 4.k.m^{\frac{2}{3}} = 4.A_i$$

Alternativa: B

4.1.3 Desigualdade triangular

(ENEM 2014 - Q. 166)

Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



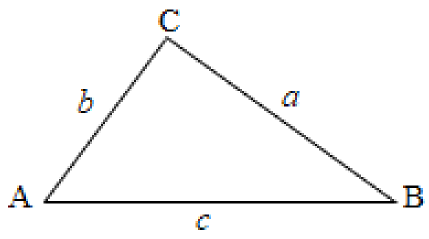
A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3. b) 5. c) 6.

d) 8. e) 10.

Resolução: Para resolver esta questão, devemos analisar a condição de existência de um triângulo. Consideremos o triângulo ABC abaixo, com lados medindo *a*, *b* e *c*.

Para um lado qualquer do triângulo, sua medida deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados e menor que o módulo da diferença entre estes outros dois lados, ou seja, para o triângulo ABC:



•|b-c| < a < b+c;
•|a-c| < b < a+c;
•|a-b|< c < a+b.

Como os triângulos a serem formados devem sempre possuir um lado igual a 6, vamos supor c = 6. O triângulo deve possuir um perímetro igual a 17, logo:

$$a+b+c=17 \Rightarrow a+b+6=17 \Rightarrow a+b=11 \ (1)$$

Supondo que a>b, segue que:

$$a-b=|a-b| \ (2)$$

Com a condição $|a-b|<c<a+b$ e utilizando (1) e (2), vamos determinar os possíveis valores de a e b:

$$|a-b|<c<a+ba-b<6<11$$

•a=6 e b=5: 6-5 =1 < 6;
•a=7 e b=4: 7-4 = 3 < 6;
•a=8 e b=3: 8-3 = 5 < 6;
•a=9 e b=2: 9- 2 = 7 < 6, afirmação falsa;
•a=10 e b=1: 10-1 = 9 < 6, afirmação falsa.

Logo, a quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é 3.

Alternativa: A

4.1.4 Polígonos regulares inscritos ou circunscritos na circunferência

(ENEM 2012 - Q. 165 - Quadriláteros)

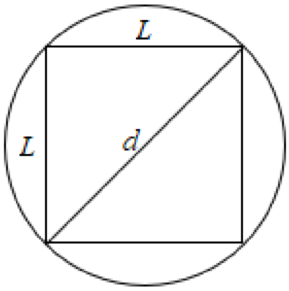
Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

a) $R \geq \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ b) $R \geq \dfrac{2L}{\sqrt{\pi}}$ c) $R \geq \dfrac{L}{\sqrt{\pi}}$

d) $R \geq \dfrac{L}{2}$ e) $R \geq \dfrac{L}{2\sqrt{2}}$

Resolução:Para que a base quadrada seja fixada sobre a plataforma circular, o diâmetro do círculo deve ser maior ou igual a diagonal do quadrado de lado L.



Logo:

$$di\hat{a}metro \geq diagonaldoquadrado \Rightarrow$$

$$2R \geq L\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$R \geq \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{L\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

Alternativa: A

(ENEM 2015 - Q. 140 - Triângulos)

O tampo de vidro de uma mesa quebrou-se e deverá ser substituído por outro que tenha a forma de círculo. O suporte de apoio da mesa tem o formato de um prisma reto, de base em forma de triângulo equilátero com lados medindo 30 cm.

Uma loja comercializa cinco tipos de tampos de vidro circulares com cortes já padronizados, cujos raios medem 18 cm, 26 cm, 30 cm, 35 cm e 60 cm. O proprietário da mesa deseja adquirir nessa loja o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

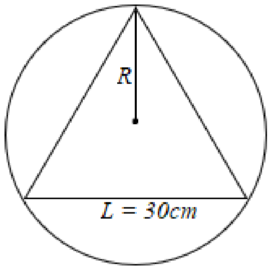
O tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em centímetros, é igual a :

a) 18. b) 26. c) 30.

d) 35. e) 60.

Resolução: Sejam R_t e R o raio do tampo e o raio do círculo circunscrito ao triângulo equilátero de lado $L = 30cm$, respectivamente, ambos em cm. Como o proprietário da mesa deseja adquirir o tampo de menor diâmetro que seja suficiente para cobrir a base superior do suporte da mesa, segue que:

$$R_t \geq R$$



Em um círculo de raio R circunscrito em um triângulo equilátero de lado L, a medida de R corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura do triângulo, que mede $\frac{L\sqrt{3}}{2}$

Logo, segue:

$$R_t \geq R = \frac{2}{3}.\frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{L\sqrt{3}}{3} = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} = 10.1,7 = 17cm$$

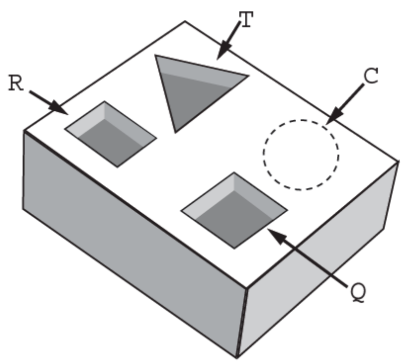
Então, o tampo a ser escolhido será aquele cujo raio, em cm, é igual a 18.

Alternativa: A

(ENEM 2016 - Q. 159 - Triângulos)

Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada(Q),de lado cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma forma de um triângulo equilátero (T),de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular(C).

O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm;(IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.



Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

a) I. b) II. c) III.

d) VI. e) V.

Resolução: •A menor circunferência na qual se pode inscrever o quadrado tem diâmetro $4\sqrt{2}cm = 4.1,4cm = 5,6cm(figura1)$;

•A maior circunferência que pode ser inscrita no quadrado tem diâmetro medindo 4cm (figura 1).

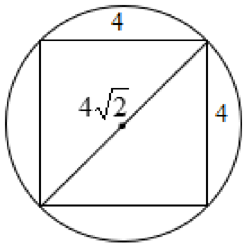


Figura 1

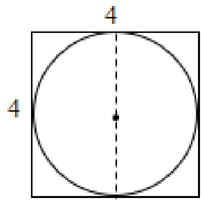


Figura 2

• A maior circunferência na qual se pode inscrever o triângulo equilátero tem diâmetro 2R, conforme figura 3, sendo que R corresponde a $\frac{2}{3}$ da altura *(h)* do triângulo: $d = 2R = 2.\frac{2}{3}.h = 2.\frac{2}{3}.\frac{L\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}.6,8.1,7 \cong 7,71cm$;

• A maior circunferência que pode ser inscrita no triângulo equilátero tem diâmetro que corresponde a 2 vezes $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo: $d = 2.\frac{1}{3}h = \frac{2}{3}.\frac{6,8\sqrt{3}}{2} \cong 3,86cm$.

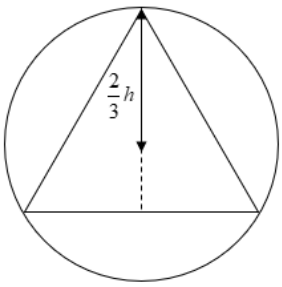


Figura 3

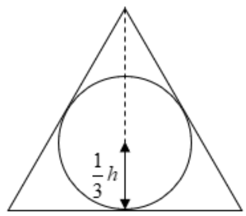


Figura 4

•A maior circunferência que pode ser inscrita no retângulo tem diâmetro 3cm (figura 5);

•A menor circunferência na qual se pode inscrever o retângulo tem diâmetro 5cm, que corresponde à medida da diagonal do retângulo (figura 6).

Para que as peças não caibam na perfuração circular, o diâmetro desta deverá ser menor que 5 cm. Para que a peça da base circular não caiba nas demais perfurações, a peça de base circular deverá ter diâmetro maior que 4 cm. Assim, para que seja atingido o objetivo do marceneiro, a serra copo que ele deverá escolher será a de 4,7 cm de diâmetro, ou seja, a serra II.

Alternativa: B

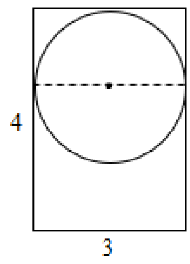


Figura 5

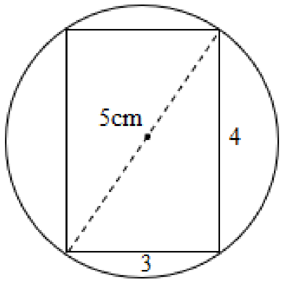


Figura 6

4.1.5 Reconhecimento de figuras geométricas

(ENEM 2009 - Q. 149 - Círculo)

Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Croce, é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis de Borromeo. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes: escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.

Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeo?

a) 

b) 

c) 

d) 

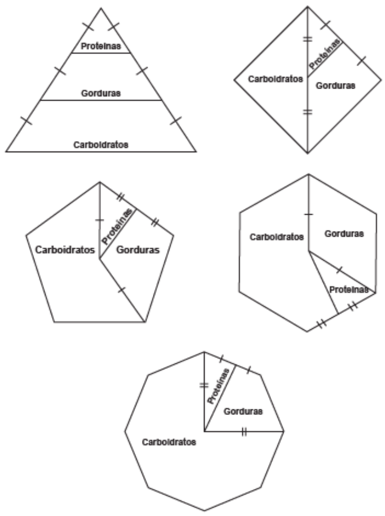
e) 

Resolução: Acompanhando-se a figura, nota-se que o anel esquerdo está na frente do anel superior e atrás do anel direito. Nota-se, também, que o anel direito está atrás do anel superior. Logo, o melhor esboço que representa os anéis de Borromeo é o da alternativa E.

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 164 - Proporção)

Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o:

a) Triângulo . b) Losango. c) Pentágono.

d) Hexágono. e) Octágono.

Resolução: Dentre as alternativas apresentadas:

a) No triângulo, é perceptível que não há 60% de carboidratos – alternativa descartada;

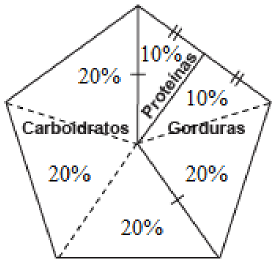
b) No losango, há exatamente 50% de carboidratos – alternativa descartada;

c) e d) No pentágono e no hexágono, vê-se que há um pouco mais de 50% de carboidratos – então essas alternativas ainda não podem ser descartadas;

e) No octógono, se visualizarmos sua divisão em 4 partes, vemos que os carboidratos ocupam 3 partes, o que corresponde a 75% – alternativa eliminada.

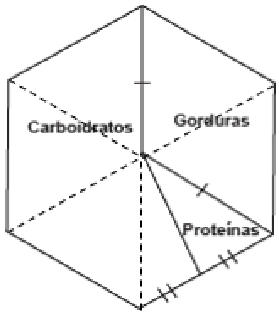
O pentágono pode ser dividido em 5 triângulo congruentes. Então, cada um destes triângulos corresponde a 20% da área do pentágono.

Assim, a distribuição das áreas correspondentes é:



•Carboidratos: 20% + 20% + 20% = 60%;
•Gorduras: 20% + 10% = 30%;
•Proteínas: 10%.

Como as porcentagens das áreas do pentágono satisfazem as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos, certamente esta é a alternativa correta. Mas, mesmo assim, vamos analisar o hexágono. Na figura abaixo, o hexágono foi dividido em 6 triângulos congruentes. Então, cada um destes triângulos corresponde a $\dfrac{100\%}{6}$ da área do pentágono.



Como os carboidratos correspondem a 3 triângulos e meio, segue:

$$\acute{A}rea_{carboidratos} = 3{,}5.\frac{100\%}{6} = \frac{350\%}{6} \cong 58{,}33\%$$

Logo, a parte corresponde a carboidratos não satisfaz as condições.

Alternativa: C

(ENEM 2015 - Q. 148 - Raciocínio Lógico)

Uma família fez uma festa de aniversário e enfeitou o local da festa com bandeirinhas de papel. Essas bandeirinhas foram feitas da seguinte maneira: inicialmente, recortaram as folhas de papel em forma de quadrado, como mostra a Figura 1. Em seguida, dobraram as folhas quadradas ao meio sobrepondo os lados BC e AD, de modo que C e D coincidam, e o mesmo ocorra com A e B, conforme ilustrado na Figura 2. Marcaram os pontos médios O e N, dos lados FG e AF, respectivamente, e o ponto M do lado AD, de modo que AM seja igual a um quarto de AD. A seguir, fizeram cortes sobre as linhas pontilhadas ao longo da folha dobrada.

Após os cortes, a folha é aberta e a bandeirinha está pronta.

A figura que representa a forma da bandeirinha pronta é:

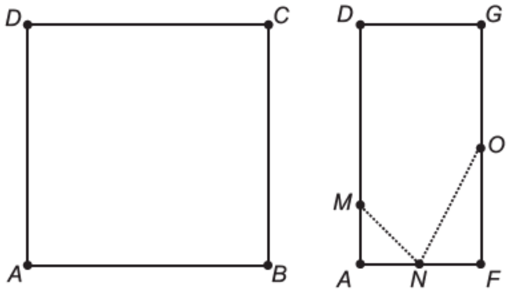
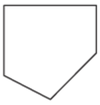
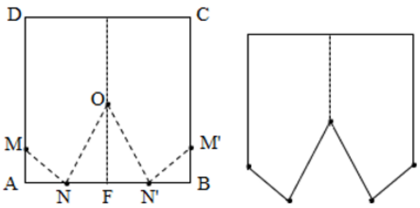


Figura 1 Figura 2

a)  b)  c) 

d)  e) 

Resolução: A figura abaixo ilustra como fica o papel quadrado após ser cortado e aberto.



Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 178 - Raciocínio Lógico)

Os alunos de uma escola utilizaram cadeiras iguais às da figura para uma aula ao ar livre. A professora, ao final da aula, solicitou que os alunos fechassem as cadeiras para guardá-las. Depois de guardadas, os alunos fizeram um esboço da vista lateral da cadeira fechada.

Qual é o esboço obtido pelos alunos?

a)  b)  c) 

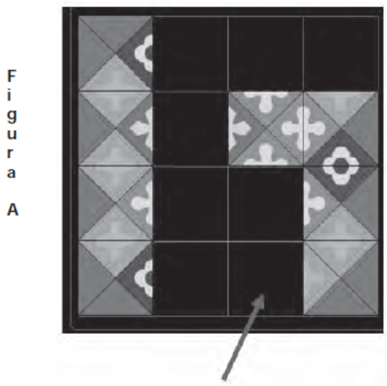
d)  e) 

Resolução: : O esboço da vista lateral da cadeira fechada, observado de cima para baixo, deverá ser um retângulo opaco que representa o encosto da cadeira, seguido por um retângulo vazado que representa o espaço entre os braços da cadeira e o seu assento, seguido por outro retângulo opaco que representa o assento fechado e por fim, um outro retângulo vazado que representa as pernas da cadeira. Portanto, o esboço obtido é melhor representado pela figura da alternativa C.

Alternativa: C

(ENEM 2009 - Q. 145 - Simetria)

As figuras a seguir exibem um trecho de um quebracabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.



É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça:

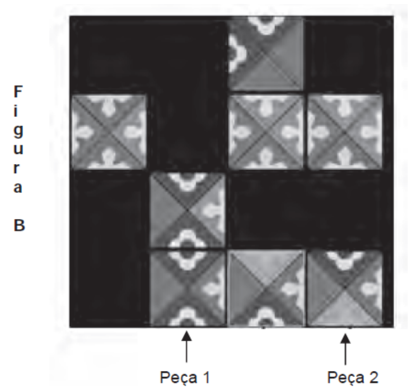
a) 1 Após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 Após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 Após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 Após girá-la 180° no sentido horário.

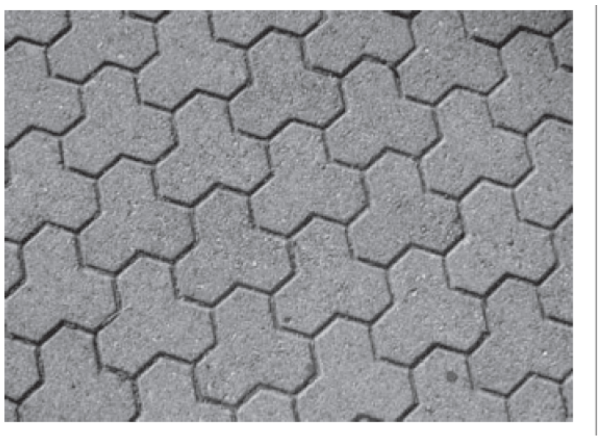
e) 2 Após girá-la 270° no sentido anti-horário.



Resolução: O espaço indicado pela seta aponta para um lugar cuja peça deve ter um dos lados como a diagonal de um quadrado claro. Dentre as peças apresentadas, a 2 possui este lado, porém ele deve estar na vertical à direita. Como ele se encontra na posição horizontal embaixo, deve ser rotacionado em 270º no sentido horário ou 90º no anti-horário. Logo, a opção correta é a da letra C.

Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 154 - Simetria)



O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de:

a) 45° .

b) 60°.

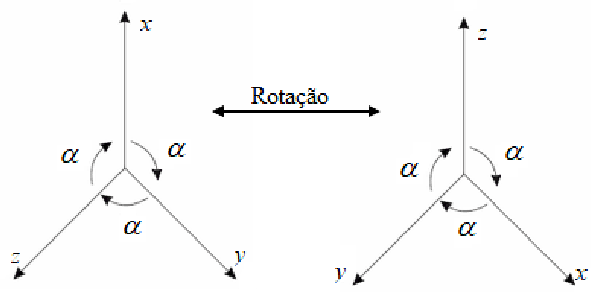
c) 90°.

d) 120°.

e) 180°.

Resolução: Seja α o ângulo formado pelos eixos O_x, O_y e O_z. Para que O_x coincida com O_y, O_y coincida com O_z e finalmente, Oz coincida com O_x, o ângulo de rotação em torno do centro O do polígono, deve ser tal que:

Alternativa: D

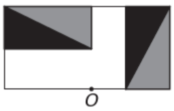


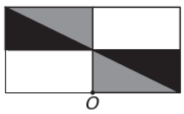
(ENEM 2013 - Q. 160 - Simetria)

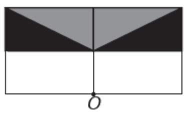
Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto O.

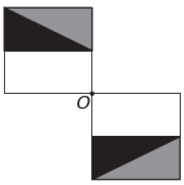
Figura original

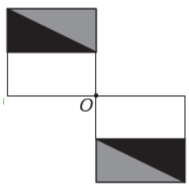
A imagem que representa a nova figura é:

a) 

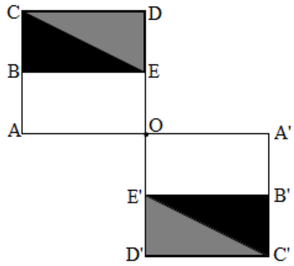
b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: De acordo com a figura abaixo, em relação ao ponto O, o simétrico do:
•ponto A é o ponto A';
•ponto B é o ponto B';
•ponto C é o ponto C';
•ponto D é o ponto D';
•ponto E é o ponto E';
•triângulo BCE é o triângulo B'C'E';
•quadrilátero OACD dado é o quadrilátero OA'C'D'.
Alternativa: E



4.2 Geometria Espacial

4.2.1 Geometria de posição

(ENEM 2012 - Q. 166 - Geometria de posição)

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

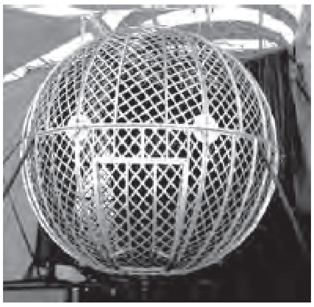


Figura 1

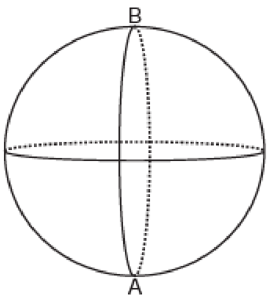
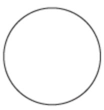


Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B. A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por:

a) 

b) 

c) 

d) 

e)

Resolução: Supondo que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B, a circunferência percorrida pelo motoqueiro deve ser projetada no chão, uma vez que o único foco de luz está direcionado a ele.

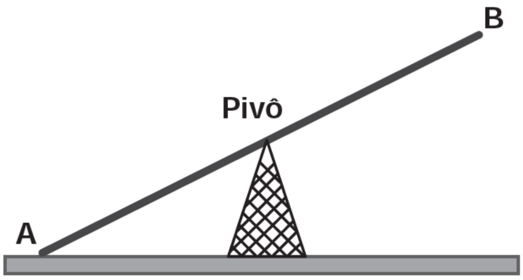
Como a circunferência está na vertical em relação ao chão, sua projeção é representada por um segmento de reta congruente à medida do diâmetro desta circunferência.

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 173 - Projeção Ortogonal)

Gangorra é um brinquedo que consiste de uma tábua longa e estreita equilibrada e fixada no seu ponto central (pivô). Nesse brinquedo, duas pessoas sentam-se nas extremidades e, alternadamente, impulsionam-se para cima, fazendo descer a extremidade oposta, realizando, assim, o movimento da gangorra.

Considere a gangorra representada na figura, em que os pontos A e B são equidistantes do pivô:



A projeção ortogonal da trajetória dos pontos A e B, sobre o plano do chão da gangorra, quando esta se encontra em movimento, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

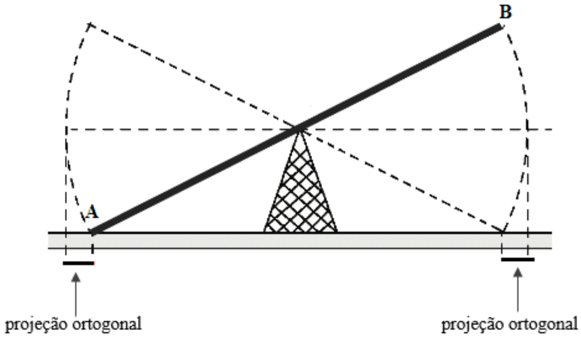
Resolução: A projeção ortogonal de um objeto é a figura formada em um plano, a partir da projeção de todos os pontos de outra figura, fora dele. As trajetórias dos pontos A e B são dois arcos de circunferência, com centro no pivô, localizados num mesmo plano perpendicular ao plano do chão. Então, suas projeções ortogonais sobre o plano do chão é um par de segmentos da reta de interseção desse tal plano com o plano do chão, conforme figura abaixo.

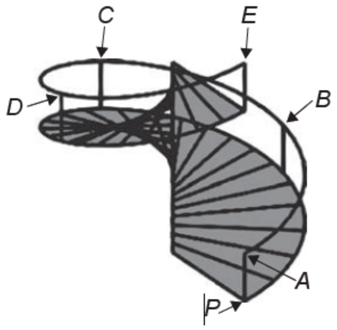
Alternativa: B

(ENEM 2014 - Q. 154 - Projeção Ortogonal)

O acesso entre os dois andares de uma casa é feito através de uma escada circular (escada caracol),representada na figura. Os cincos pontos A, B,C,D, E sobre o corrimão estão igualmente espaçados, e os pontos P, A e E estão em uma mesma reta. Nessa escada, uma pessoa caminha deslizando a mão sobre o corrimão do ponto A até o ponto D.

A figura que melhor representa a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa é:





a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

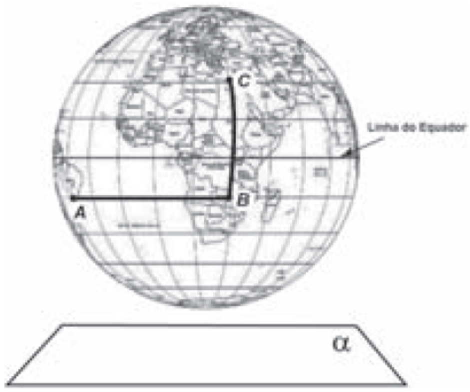
Resolução: Como a escada é circular e os pontos P, A e E estão alinhados, segue que a projeção ortogonal do corrimão de A até E, sobre o piso da casa, é uma circunferência completa. Como a pessoa percorre de A até D, a projeção ortogonal, sobre o piso da casa (plano), do caminho percorrido pela mão dessa pessoa, é $\frac{3}{4}$ de circunferência.

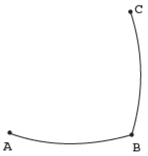
Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 172 - Projeção Ortogonal)

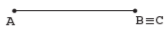
A figura representa o globo terrestre e nelas estão marcados os pontos A, B e C. Os pontos A e B estão localizados sobre um mesmo paralelo, e os pontos B e C, sobre um mesmo meridiano. É traçado um caminho do ponto A até C, pela superfície do globo, passando por B, de forma que o trecho de A até B se dê sobre o paralelo que passa por A e B e, o trecho de B até C se dê sobre o meridiano que passa por B e C. Considere que o plano α é paralelo a linha do equador na figura.

A projeção ortogonal, no plano α, do caminho traçado no globo pode ser representada por:



a) 

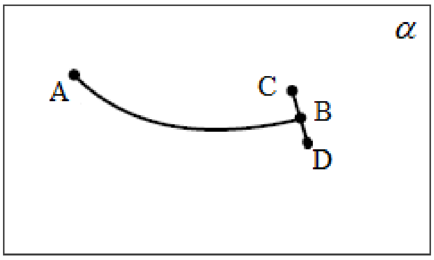
b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: A projeção ortogonal de uma parte de um paralelo sobre o plano α, paralelo ao plano equatorial, é um arco de circunferência. Logo, as únicas alternativas possíveis são A, D e E. Já a projeção ortogonal de uma parte de um meridiano sobre o mesmo plano α é um segmento de reta. Seja D o ponto de interseção entre o meridiano e a Linha do Equador. A projeção ortogonal, do caminho traçado no globo, é a representada na figura abaixo.



Alternativa: E

4.2.2 **Poliedros**

(ENEM 2015 - Q. 156 - Reconhecimento de figuras geométricas)

Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?

a) 6. b) 8. c) 14.

d) 24. e) 30.

Resolução: Um cubo tem 6 faces e 8 vértices. De acordo com o enunciado, foi feito um corte em cada um dos cantos (vértices) do cubo, retirando-se os cantos, que possuem o formato de um tetraedro de arestas menores do que a metade da aresta do cubo. Logo, em cada canto (vértice), foram gerados novos planos, que correspondem a faces triangulares. O troféu então possui:

6 faces + 8 novas faces (que antes eram vértices) = 14 faces

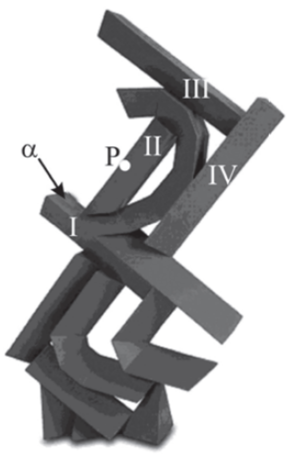
Como cada face será pintada com uma cor distinta das demais, serão necessárias 14 cores.

Alternativa: C

4.2.3 **Prismas**

(ENEM 2009 - Q. 151 - Interseção com planos)

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: www.escritosriodearte.com.br. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

a) Dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.

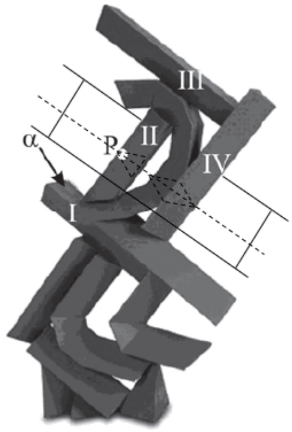
b) Dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.

c) Dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

d) Dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.

e) Dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

Resolução: De acordo com os dados do enunciado, a interseção do plano com a escultura é a união de um triângulo com um quadrilátero, conforme figura abaixo.



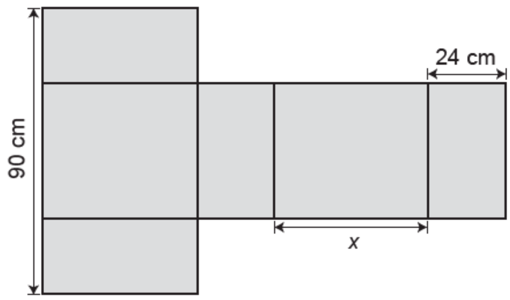
Se a interseção pedida fosse do plano com os primas II e IV; considerando as faces destes dois prismas, respectivamente paralelas, então a alternativa A seria correta.

Alternativa: A (com ressalva)

(ENEM 2014 - Q. 145 - Planificação)

Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelipedo retângulo.



O maior valor possível para X, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

a) 25.
b) 33.
c) 42.
d) 45.
e) 49.

Resolução: De acordo com a figura, as dimensões da caixa são x cm, 24 cm e (90-24-24)cm = 42 cm. Como a soma das dimensões da bagagem, de acordo com a regulamentação da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac) não pode ser superior a 115 cm, segue que:

$$x + 24 + 42 \leq 115 \Rightarrow$$
$$x \leq 115 - 24 - 42 \Rightarrow$$
$$x \leq 49$$

Logo, o maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é 49.

Alternativa: E

(ENEM 2009 - Q. 180 - Volume)

A cisterna é um recipiente utilizado para armazenar água da chuva. Os principais critérios a serem observados para captação e armazenagem de água da chuva são: a demanda diária de água na propriedade; o índice médio de precipitação (chuva), por região, em cada período do ano; o tempo necessário para armazenagem; e a área de telhado necessária ou disponível para captação.Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA) sugere que sejam adicionados 10% ao volume calculado de água.

Desse modo, o volume, em m^3, de uma cisterna é calculado por $V_c = V_d \times N_{dia}$, em que V_d= volume de demanda da água diária (m^3), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de 10%.

Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das edificações.

Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de $1m^2$ produz 1 litro de água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m^2) = volume da cisterna (em litros)/precipitação.

Disponível em: www.cnpsa.embrapa.br. Acesso em: 8 jun. 2009 (adaptado).

Para atender a uma demanda diária de 2.000 litros de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, deverá ter as dimensões mínimas de:

a) 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de $30m^2$.

b) 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de $300m^2$.

c) 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de $3.000m^2$.

d) 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de $2.730m^2$.

e) 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de $3.300m^2$.

Resolução: De acordo com os dados do enunciado, V_d = 2000 litros e N_{dia} = 15 dias. O volume da cisterna, já acrescidos dos 10%, é determinado por: $V_c = V_d.N_{dia}.1,1$. Logo, para os dados acima, o volume da cisterna, em litros, é igual a:

$$V_c = 2000.15.1,1 = 33000 \text{ litros.}$$

Como a precipitação de chuva de 1mm sobre uma área de $1m^2$ produz 1 litro de água, segue que a área do telhado, para uma precipitação de 110mm que poderá produzir 33000 litros, que corresponde ao volume da cisterna acrescidos dos 10%, deve ser:

$$\frac{33000}{110} = 300m^2$$

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 139 - Volume)

Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

a) 5 cm. b) 6 cm. c) 12 cm.
d) 24 cm. e) 25 cm.

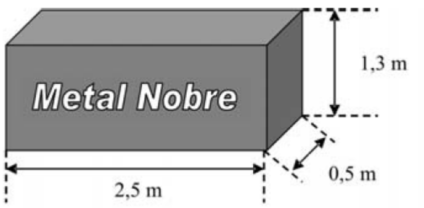
Resolução: Sendo a, b e c as medidas da largura, do comprimento e da espessura de um paralelepípedo reto, seu volume é dado por $V = a.b.c$. Logo, para a barra de chocolate, seu volume é: $V_{barradechocolate} = 3.18.4 = 216cm^3$ Como o volume de um cubo de aresta a é dado por $V = a^3$ e os chocolates em formato de paralelepípedo e de cubo têm o mesmo volume, segue que:

$$a^3 = 216 \Rightarrow a = 6\,cm$$

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 146 - Volume)

A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.



O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

a) Massa. b) Volume. c) Superfície.
d) Capacidade. e) Comprimento.

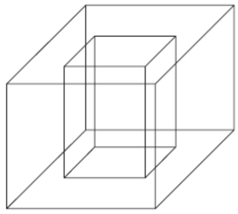
Resolução: O produto das três dimensões, a saber: comprimento, largura e altura, resulta no volume de um paralelepípedo.

Observação: Considerando que o sólido seja maciço, não se pode substituir esse "volume" por "capacidade".

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 179 - Volume)

Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.



O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de:

a) 12 cm^3. b) 64 cm^3. c) 96 cm^3.

d) 1216 cm^3. e) 1728 cm^3.

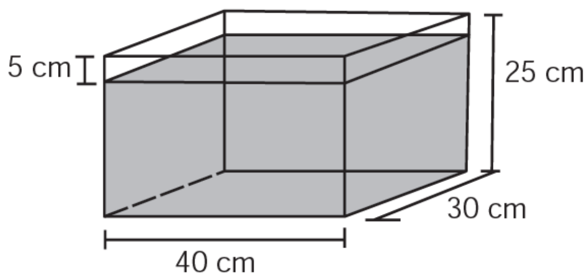
Resolução: O volume de madeira utilizado na confecção do objeto corresponde ao volume do cubo maior menos o volume do cubo menor, de arestas, 12cm e 8cm, respectivamente. Como o volume de um cubo de aresta a é dado por $V = a^3$, segue que o volume solicitado, em cm^3, é:

$$12^3 - 8^3 = 1728 - 512 = 1216$$

Alternativa: D

(ENEM 2012 - Q. 147 - Volume)

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2400cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Resolução: O volume de água deslocado é igual ao volume do objeto, $2400cm^3$. Este volume pode ser escrito como sendo o volume de um paralelepípedo com dimensões $30x40xhcm$, com h representando a altura que o nível da água vai subir. Como o volume de um paralelepípedo retangular reto pode ser calculado fazendo o produto entre as suas três dimensões, segue que:

$$30.40.h = 2400 \Rightarrow$$

$$h = \frac{2400}{30.40} = 2cm$$

Logo, o nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
Alternativa: C

(ENEM 2012 - Q. 176 - Volume)

A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é

a) 20% menor que V, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.

b) 36% menor que V, porque a área da base diminui de a^2 para $((1-0,2)a)^2$

c) 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.

d) 51,2% menor que V, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.

e) 60% menor que V, porque cada lado diminui 20%.

Resolução: O volume de um cubo de aresta a é dado por $V = a^3$. Após o processo de cozimento a travessa sofre uma contração, em dimensões lineares, de 20%, ou seja, a medida da aresta passa a ser 80% da medida anterior, 0,8a e, então, o novo volume é:

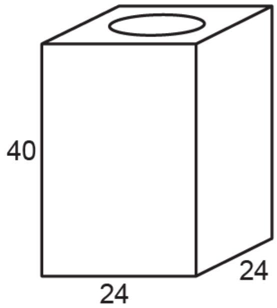
$$V' = (0,8a)^3 = 0,512a^3$$

Então:

$$V - V' = a^3 - 0,512a^3 = 0,488a^3 = 48,8\%a^3$$

Logo, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um volume que é 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.

Alternativa: C



(ENEM 2014 - Q. 146 - Volume)

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros,mostradas na figura.

Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

a) 14,4 %. b) 20,0 %. c) 32,0 %.

d) 36,0 %. e) 64,0 %.

Resolução: O volume da lata, em formato de paralelepípedo retangular reto, cujas dimensões são 40 de altura, 24 e 24 na base, é dado por:

$$V = 40.24.24$$

A nova lata terá um aumento de 25% nas dimensões da base, ou seja, as dimensões da base passarão a medir $1,25.24$ e, então, seu volume será dado por:

$$V' = 1,25.24.1,25.24.h \ ,$$

Como o volume da nova lata será igual ao volume da lata antes do aumento nas dimensões da base, segue que:

$$1,25.24.1,25.24.h = 40.24.24 \Rightarrow$$
$$h = \frac{40}{1,25.1,25} = \frac{40}{1,5625} = 25,6$$

Como a altura da lata era 40, segue que esta teve uma redução de (40-25,6)= 14,4 o que, percentualmente, corresponde a:

$$\frac{14,4}{40} = 0,36 = 36\%$$

Alternativa: D

(ENEM 2014 - Q. 160 - Volume)

O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala 1 : 100, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3 cm, 1 cm e 2 cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será:

a) 6. b) 600. c) 6 000.

d) 60 000. e) 6 000 000.

Resolução: Como a escala do projeto é de 1:100 e as dimensões do armário no projeto são de 3cm,1cm e 2cm, segue que as dimensões reais do armário são 300cm, 100cm e 200cm. Logo, como o armário tem o formato de um paralelepípedo retângulo reto, o volume real é dado por:

$$V = 300.100.200 = 6000000cm^3$$

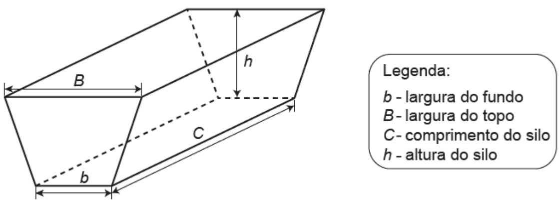
Alternativa: E

Escala e Volume

Esta é uma questão que também poderia ser trabalhada no contexto de Escala, desde que os alunos já tenham conhecimento sobre como calcular o volume de um paralelepípedo.

(ENEM 2014 - Q. 171 - Volume)

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

a) 110. b) 125. c) 130.

d) 220. e) 260.

Resolução: Para cada metro de altura, a largura do topo tem 0,5 metros a mais do que a largura do fundo, assim, em 2 metros de altura, a largura do topo tem $2x0,5 = 1$ metro a mais do que a largura do fundo, ou seja, b=5m. O volume de um prisma é dado pelo produto entre a área da base e a altura. Como o silo tem o formato de um prisma reto trapezoidal, segue que a área da base é dada por:

$$A_b = \frac{(B+b).h}{2} \ ,$$

e, então, o volume do silo vale:

$$V = \frac{(6+5).h}{2}.20 = 11.20 = 220m^3$$

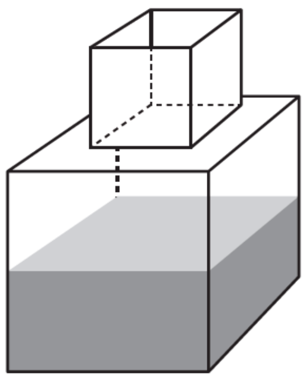
Como 1 tonelada de forragem ocupa $2m^3$ desse tipo de silo, segue que a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

$$\frac{220m^3}{2m^3/t} = 110t.$$

Alternativa: A

(ENEM 2014 - Q. 173 - Volume)

Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam,como indicado na figura. A aresta da parte cúbica dee baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

a) 8. b) 10. c) 16.

d) 18. e) 24.

Resolução: Como a torneira levou 8 minutos para encher metade da parte debaixo, segue que, para encher completamente a parte debaixo, ainda serão gastos mais 8 minutos, ou seja, serão gastos 16 minutos para encher o cubo maior. Sendo a, a medida da aresta do cubo menor, a medida da aresta do cubo maior pode ser indicada por *2a*. Então, o volume do cubo maior é $V = (2a)^3 = 8a^3$, ou seja, 8 vezes maior que o volume do cubo menor, que é dado por a^3 ou, equivalentemente, o volume do cubo menor é $\dfrac{1}{8}$ do volume do cubo maior. Logo, para encher o cubo menor, a torneira gastará $\frac{1}{8}$ do tempo que gastou para encher o cubo maior: $\dfrac{1}{8}.16 = 2$ minutos. E, então, a torneira levará $(8+2) = 10$ minutos para encher completamente o restante do depósito.

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 179 - Volume)

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa.

Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1 000 cm3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é:

a) 450.
b) 500.
c) 600.
d) 750.
e) 1000.

Resolução: O volume da embalagem, que tem o formato de paralelepípedo retangular reto, é dado por:

$$V = 10.20.10 = 2000cm^3.$$

Após a mistura de chocolate ficar cremosa, seu volume inicial de $1000cm^3$ sofrerá um acréscimo de 25%, ocupando, então:

$$1000.1,25 = 1250cm^3$$

Então, a capacidade restante na embalagem será de $(2000-1250)cm^3 = 750cm^3$. Sendo x o volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem, segue que:

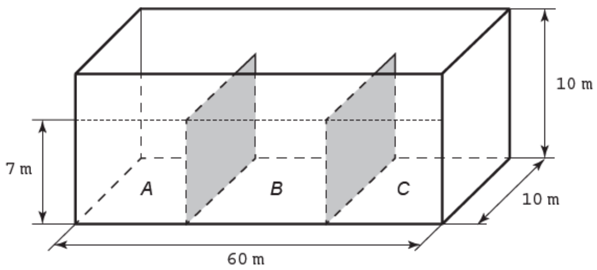
$$1,25.x = 750 \Rightarrow$$

$$x = \frac{750}{1,25} = 600$$

Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 146 - Volume)

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m x 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados,conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

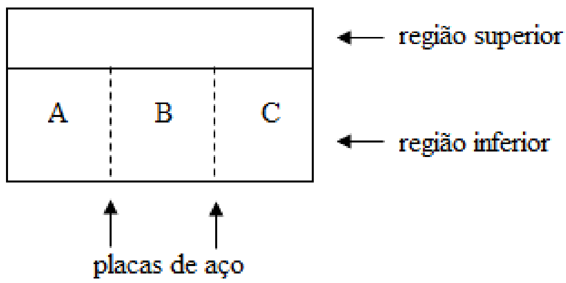
Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de :

a) $1,4x10^3 m^3$.   b) $1,8x10^3 m^3$.   c) $2,0x10^3 m^3$.

d) $3,2x10^3 m^3$.   e) $6,0x10^3 m^3$.

Resolução: Além das 3 divisões verticais do reservatório, é importante percebermos que o fato de as placas de aço possuírem apenas 7 m de altura, faz com o reservatório seja dividido em outras duas regiões: uma superior a 7 m e uma inferior a 7m. A figura abaixo, que representa a vista frontal do reservatório, pode ajudar a visualizar estas duas regiões.



Assim, em caso de rompimento, independentemente em qual compartimento seja, todo o volume da região superior vazará, assim como todo o volume do compartimento que rompeu também vazará, restando apenas o volume dos outros dois compartimentos. Logo, para sabermos o volume de petróleo derramado, podemos calcular o volume de todo o reservatório e diminuir, deste, o volume de dois compartimentos, que será o volume que terá restado no compartimento.

O volume de todo o reservatório é dado por:

$$V = 60.10.10 = 6000m^3.$$

Como a altura do reservatório é de 10 m e a altura das placas de aço é de 7m, segue que cada compartimento é um paralelepípedo de dimensões 20m, 10m e 7m, logo, o volume de dois reservatórios é dado por:

$$V' = 2.(20.10.7) = 2.1400 = 2800m^3.$$

Assim, após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado, em m^3, terá sido de:

$$6000 - 2800 = 3200 = 3,2.10^3.$$

Alternativa: D

4.2.4 **Pirâmides**

(ENEM 2009 - Q. 178 - Interseção com planos)

Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

d) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

Resolução: O artesão afirmou que uma das faces da peça formada é pentagonal, ou seja, possui cinco lados. As únicas alternativas que justificam o fato de uma das faces possuir cinco lados são as opções C e D. A pirâmide de base quadrada possui, além da base, quatro faces laterais, totalizando em cinco. Porém, o polígono resultante da interseção do plano com a pirâmide será pentagonal somente se o plano interceptar todas as cinco faces dessa pirâmide.

Alternativa: C

(ENEM 2016 - Q. 162 - Interseção com planos)

É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

a) Quadrados, apenas.

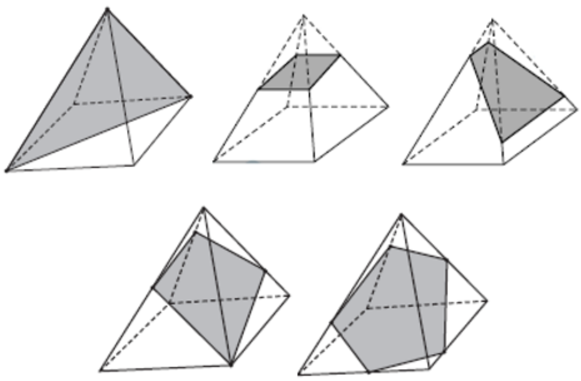
b) Triângulos e quadrados, apenas.

c) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

d) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

e) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

Resolução: O número de polígonos formados depende do número de faces da pirâmide. Como a pirâmide é de base quadrada, segue que ela possui 5 faces – a da base mais as 4 laterais. Logo, o artista plástico pode cortar suas faces em 3, 4 ou 5 pontos, criando, desta forma, triângulos (3 pontos), quadrados, trapézio, quadriláteros irregulares (todos 4 pontos) e pentágonos (5 pontos). Admitimos que um quadrilátero irregular é um quadrilátero que não é um trapézio. As figuras abaixo ilustram possíveis maneiras de serem formados os polígonos citados acima.



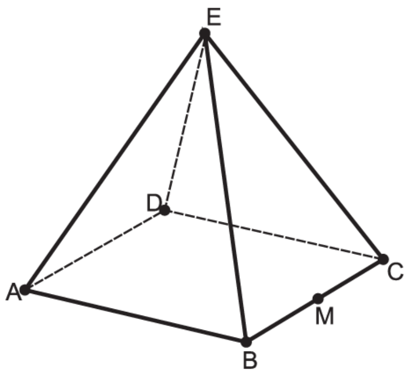
Alternativa: E

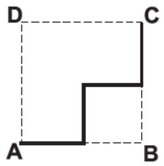
(ENEM 2012 - Q. 154 - Raciocínio lógico)

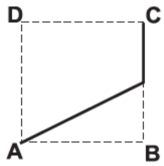
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

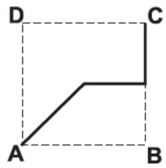
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E,a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

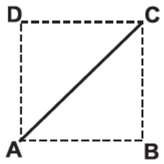
O desenho que Bruno deve fazer é:

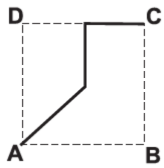


a) 

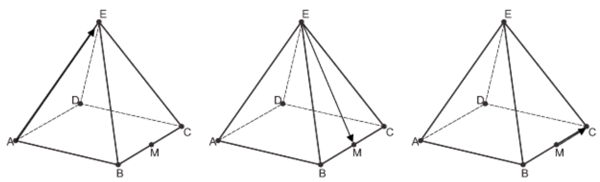
b) 

c) 

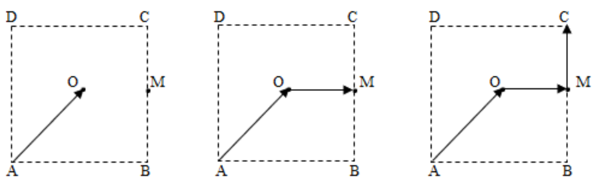
d) 

e) 

Resolução: Admitindo-se a pirâmide quadrangular regular, teremos as imagens abaixo, para os deslocamentos citados. Deslocamentos realizados na pirâmide:



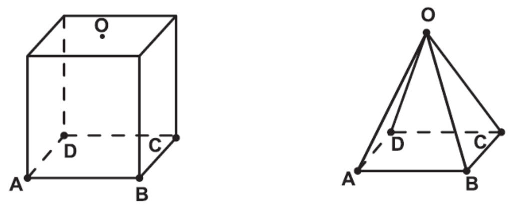
Projeção dos deslocamentos na base da pirâmide:



Alternativa: C

(ENEM 2011 - Q. 144 - Reconhecimento de figuras geométricas)

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.

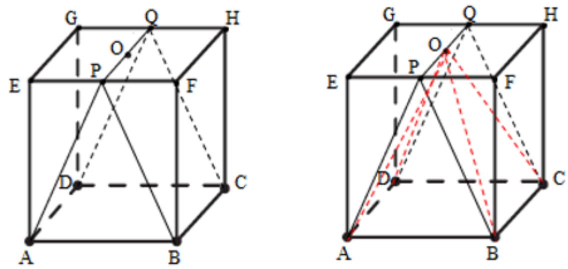


Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

a) Todos iguais.
b) Todos diferentes.
c) Três iguais e um diferente.
d) Apenas dois iguais.
e) Iguais dois a dois.

Resolução: Os sólidos descartados após os cortes que saem de O em direção às arestas AD e BC são os primas triangulares congruentes AEPQGD e BPFQHC, conforme figura 1. Já os sólidos descartados após os dois últimos cortes são os tetraedros congruentes *ABOP* e *CDOQ*, conforme figura 2.



Logo, os formatos dos quatro sólidos descartados são iguais dois a dois.

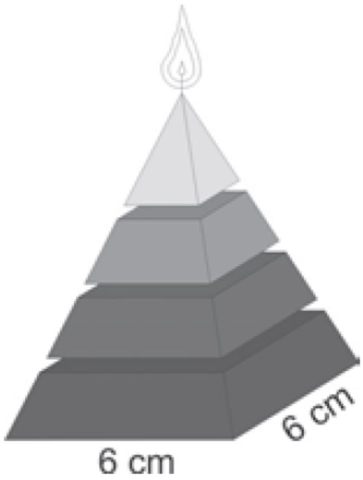
Alternativa: E

(ENEM 2009 - Q. 170 - Volume)

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3.
b) 189 cm^3.
c) 192 cm^3.
d) 216 cm^3.
e) 540 cm^3.



Resolução: De acordo com o enunciado, podemos concluir que a base da pirâmide de parafina é 16 cm, pois a vela tem 19cm de altura e há um espaço de 1 cm entre os blocos, e a altura da pirâmide retirada é 4cm, pois os 4 blocos têm mesma altura.

Lembrando que o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ da área da base vezes sua altura, segue que o volume, em cm^3, de parafina para fabricar o novo modelo de vela, é igual a:

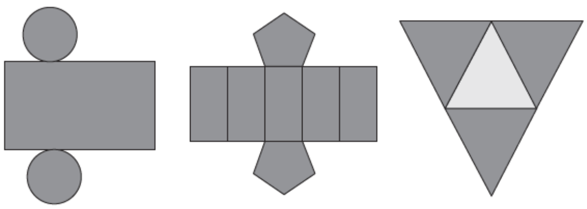
$$\frac{1}{3}.6^2.16 - \frac{1}{3}.(1,5)^2.4 = 192 - 3 = 189$$

Alternativa: B

4.2.5 **Cilindros**

(ENEM 2012 - Q. 141 - Planificação)

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

Resolução: Os sólidos geométricos que Maria obterá a partir das planificações são:

•Um cilindro (circular), que possui dois círculos nas bases e um retângulo como planificação da superfície lateral;

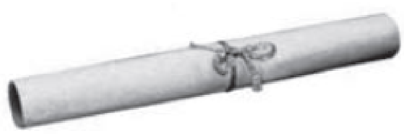
•Um prisma de base pentagonal, que possui duas bases em formato de pentágono e 5 faces laterais em formato de retângulos;

•Uma pirâmide de base triangular, que possui como planificação 4 triângulos.

Alternativa: A

(ENEM 2014 - Q. 137 - Planificação)

Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos,cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeiracde diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustra na figura.



Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

a) πd.

b) $2\pi d$.

c) $4\pi d$.

d) $5\pi d$.

e) $10\pi d$.

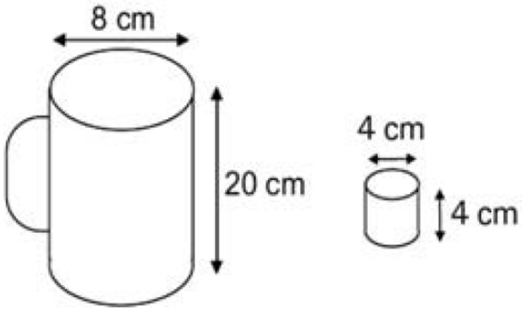
Resolução: O comprimento de cada volta é $2\pi r$ cm, sendo r o raio do círculo da base do cilindro de madeira. Lembrando que $2r = d$, segue que o comprimento pode ser indicado, em função de d, como πd cm. Como a folha dá 5 voltas no cilindro, o comprimento da folha é $5\pi d$cm.

Alternativa: D

ENEM 2010 - Q. 151 - Volume)

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:



a) Encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

b) Encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

c) Encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

d) Encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

e) Encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Resolução: Lembrando que o volume de um cilindro de raio da base r e altura h é dado por $V = \pi r^2 h$, segue que o volume de um copinho plástico, em cm^3, é igual a:

$$\pi.2^2.4 = 16\pi$$

Como Dona Maria vai precisar encher 20 copinhos pela metade, ela vai precisar de um volume, em cm^3, igual a:

$$\pi.4^2.20 = 320\pi.$$

Vejamos que o volume de café que a diarista precisa corresponde à metade do volume da leiteira. Logo, com o objetivo de não desperdiçar café, Dona Maria deve encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

Alternativa: A

(ENEM 2010 - Q. 157 - Volume)

Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 cm de diâmetro e 4 cm de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura.

Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a:

a) R$ 230,40.
b) R$ 124,00.
c) R$ 104,16.
d) R$ 54,56.
e) R$ 49,60.

Resolução: O volume de concreto, em m^3, é igual ao volume do cilindro maior, de raio R = 1,2m, menos o volume do cilindro menor, de raio r = 1m. Notemos que os dois cilindros têm mesma altura *(h)*. Logo:

$$V = \pi.R^2.h - \pi.r^2.h = \pi.h(R^2 - r^2) = \pi.4[(1,2)^2 - 1^2] = 3,1.4.0,44 = 5,456cm^3$$

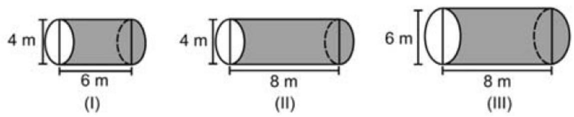
Assim, o preço da manilha, em reais, é igual a:

$$5,456.10 = 54,56.$$

Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 162 - Volume)

Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \cong 3$)

a) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

b) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

c) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

d) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

e) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

Resolução: Sejam A_I, A_{II} e A_{III} as áreas laterais desses tanques, em m^2. Lembrando que a área lateral de um cilindro de raio da base r e altura h é dada por $A_L = 2\pi rh$, então:

• $A_I = 2.\pi.2.6 = 24\pi$;
• $A_I = 2.\pi.2.8 = 32\pi$;
•$A_I = 2.\pi.3.8 = 48\pi$.

Sejam V_I, V_{II} e V_{III} as capacidades de armazenamento desses tanques, em m^3. Lembrando que o volume de um cilindro de raio da base r e altura h é dada por $V = \pi r^2 h$, então:

• $V_I = \pi.2^2.6 = 24\pi$;
• $V_{II} = \pi.2^2.8 = 32\pi$;
• $V_{III} = \pi.3^2.8 = 72\pi$.

Logo, a relação área/capacidade de armazenamento de cada tanque é dada por:

•$I : \dfrac{A_I}{V_I} = \dfrac{24\pi}{24\pi} = 1$;

- $II: \dfrac{A_{II}}{V_I I} = \dfrac{32\pi}{32\pi} = 1$
- $III: \dfrac{A_{III}}{V_I II} = \dfrac{48\pi}{72\pi} = \dfrac{2}{3}$

Como $\dfrac{2}{3} < 1$, podemos concluir que o tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade é o III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\dfrac{2}{3}$.

Alternativa: D

(ENEM 2011 - Q. 168 - Volume)

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixála doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores.O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

a) 20 mL
b) 24 mL.
c) 100 mL.
d) 120 mL.
e) 600 mL.

Resolução: Como o copo tem o formato de um cilindro circular, seu volume, em $cm^3(ml)$, é dado por:

$$\pi.r^2.h = 3.2^2.10 = 120.$$

Dividindo o volume do copo em 6 partes, 1 destas partes deve ser de açúcar, ou seja:

$$\frac{1}{6}.120 = 20ml.$$

O que pode nos levar a indicar que a quantidade de água no copo deva ser (120-20)ml=100ml e, então, a alternativa correta seria a letra C.

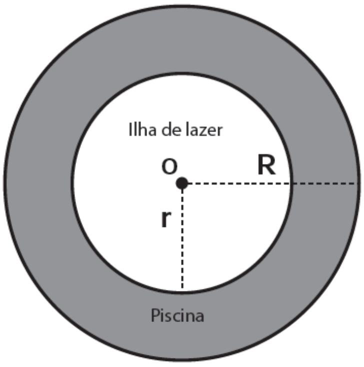
No entanto, na prática, ao misturar 100 ml de água com 20 ml de açúcar, o volume da mistura será de, aproximadamente, 100 ml e, portanto, o copo não estará completamente cheio.

Levando-se em consideração que 20 ml de açúcar se dissolvem completamente em $120ml$ d'água, a quantidade de açúcar não vai alterar significativamente a quantidade de água que deve ser utilizada na mistura para encher completamente o copo e, então, a alternativa correta pode ser a letra D.

Alternativa: C/D*

(ENEM 2013 - Q. 145- Volume)

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m3, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, $4m^3$.



Considere 3 como valor aproximado para p.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de:

a) 1,6.
b) 1,7.
c) 2,0.
d) 3,0.
e) 3,8.

Resolução: De acordo com o enunciado e considerando $\pi = 3$, a ilha de lazer tem o formato de um cilindro circular reto de raio da base r e altura 1m logo, seu volume é dado por:

$$\pi r^2 h = 3.r^2.1 = 3r^2$$

O volume destinado à água, após a construção da ilha, é dado pela diferença entre o volume da piscina, $12m^3$, e o volume da ilha de lazer, ou seja, $12 - 3r^2$. Como se deseja que o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, $4m^3$, segue que:

$$\begin{gathered} 12 - 3r^2 \leq 4 \Rightarrow \\ -3r^2 \leq 4 - 12 \Rightarrow \\ 3r^2 \geq 8 \Rightarrow \\ r^2 \geq \frac{8}{3} \Rightarrow \\ r \geq \sqrt{\frac{8}{3}} \cong 1,632m \end{gathered}$$

Portanto, o raio máximo está mais próximo de 1,6 m.

Alternativa: A

(ENEM 2014 - Q. 158 - Volume)

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

a) 168. b) 304. c) 306.

d) 378. e) 514.

Resolução: A pílula tem o formato de um cilindro com uma semiesfera de mesmo raio do cilindro em cada de suas extremidades, ou seja, a pílula então é formada por um cilindro de raio r e altura h e por uma esfera de raio r. Logo, seu volume é dado por:

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Considerando $\pi = 3$, na versão inicial da pílula, seu volume é:

$$\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 3.5^2.10 + \frac{4}{3}.3.5^3 = 750 + 500 = 1250 mm^3.$$

Já na versão com raio reduzido para 4 mm, o volume da pílula é:

$$\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 3.4^2.10 + \frac{4}{3}.3.4^3 = 480 + 256 = 736 mm^3$$

Portanto, a redução do volume da pílula, em mm^3, após a reprogramação da máquina, será igual a:

$$1250 - 736 = 514$$

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 163 - Volume)

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada. Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

a) 0,5. b) 1,0. c) 2,0.
d) 3,5. e) 8,0.

Resolução: Considerando $\pi = 3$, a cisterna atual, de formato cilíndrico com 1m de raio da base e 3m de altura, tem volume igual a:

$$\pi r^2 h = 3.1^2.3 = 9m^3$$

A nova cisterna, também com formato cilíndrico, deverá ter $81m^3$ de volume, 3m de altura e raio das base r m. Assim, para $\pi = 3$, seu raio r deve ser igual a:

$$\begin{gathered} V = \pi r^2 h \Rightarrow \\ 81 = 3.r^2.3 \Rightarrow \\ r^2 = 9 \Rightarrow \\ r = 3m. \end{gathered}$$

Logo, o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado, é de:

$$3 - 1 = 2.$$

Alternativa: C

(ENEM 2015 - Q. 167 - Volume)

O índice pluviométrico é utilizado para mensurar a precipitação da água da chuva, em milímetros, em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em determinado período de tempo. Seu cálculo é feito de acordo com o nível de água da chuva acumulada em $1m^2$, ou seja, se o índice for de 10 mm, significa que a altura do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo com 1 m² de área de base, é de 10 mm. Em uma região, após um forte temporal,verificou-se que a quantidade de chuva acumulada em um lata de formato cilíndrico, com raio 300 mm e altura 1 200 mm, era de um terço da sua capacidade.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

O índice pluviométrico da região, durante o período do temporal, em milímetros, é de

e) 10,8. b) 12,0. c) 32,4.
d) 108,0 e) 324,0.

Resolução: O volume de chuva acumulado na lata cilíndrica de raio 300mm, altura 1200 mm e ocupando um terço de sua capacidade, é:

$$\frac{1}{3}.\pi.r^2 h = \frac{1}{3}.3.300^2.1200mm^3 = 108000000mm^3.$$

Como o cálculo do índice pluviométrico é feito de acordo com o nível de água acumulada em $1m^2$, consideremos x a altura, em milímetros, do nível de água acumulada em um tanque aberto, em formato de um cubo de $1m^2$ de área da base. Então, na região em questão, o índice pluviométrico será, em milímetros:

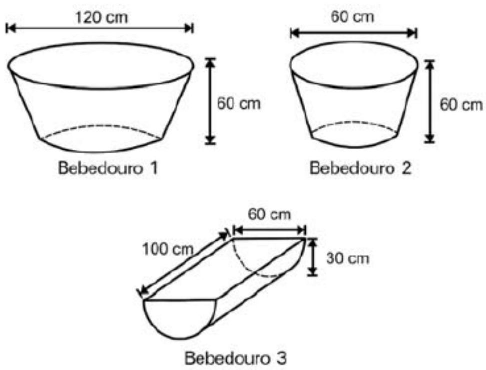
$$\begin{gathered} x.1000.1000 = 108000000 \Rightarrow \\ x = 108. \end{gathered}$$

Alternativa: D

4.2.6 Cones

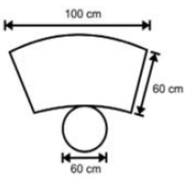
(ENEM 2010 - Q. 137 - Planificação)

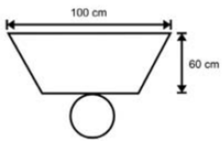
Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

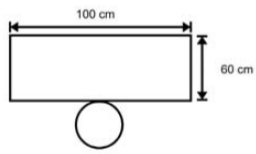


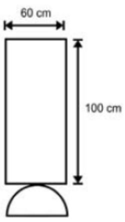
A escolha do bebedouro. In: **Biotemas**. V. 22, n°. 4, 2009 (adaptado).

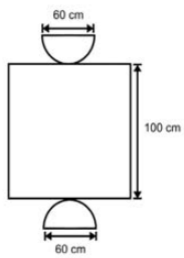
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

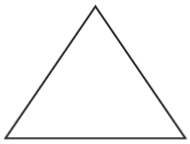
Resolução: Uma planificação do bebedouro 3, que tem o formato de um semicilindro, conforme figura, deve ser formada de um retângulo, que corresponde à área lateral, e duas semicircunferências tangenciando dois lados do retângulo, que correspondem às metades das circunferências das bases do cilindro. Dentre as alternativas, a única que apresenta estas figuras é a letra E.

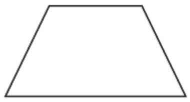
Alternativa: E

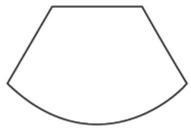
(ENEM 2014 - Q. 140 - Planificação)

Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

a) 

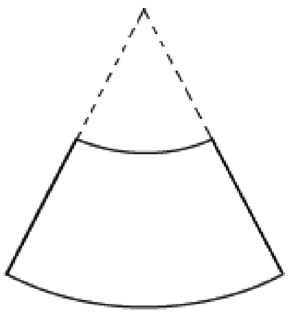
b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução: A planificação de um cone circular reto é um setor circular. Assim, a forma de adesivo é a região formada pela diferença entre dois setores circulares de mesmo ângulo central.



Alternativa: E

(ENEM 2011 - Q. 140 - Reconhecimento de figuras geométricas)

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinhas muito usado em países orientais.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

a) Pirâmide.
b) Semiesfera.
c) Cilindro.
d) Tronco de cone.
e) Cone.

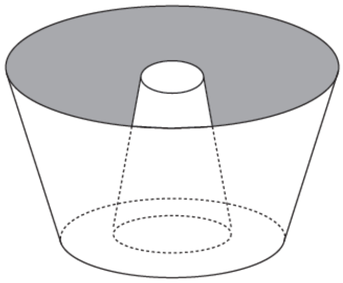
Resolução: A figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de cônica ou de cone.

Alternativa: E

Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

(ENEM 2013 - Q. 169 - Reconhecimento de figuras geométricas)

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

a) Um tronco de cone e um cilindro.
b) Um cone e um cilindro.
c) Um tronco de pirâmide e um cilindro.
d) Dois troncos de cone.
e) Dois cilindros.

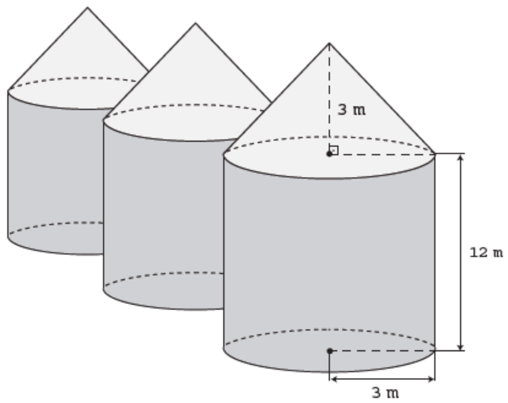
Resolução: As duas figuras geométricas tridimensionais que podemos identificar na forma de bolo possuem duas bases circulares paralelas, porém esses círculos, que formam cada base, não possuem o mesmo raio, logo não se trata de cilindros. Ambas as figuras são formadas a partir de um corte transversal paralelo à base de um cone, sendo, portanto, troncos de cone.

Alternativa: D

(ENEM 2016 - Q. 175 - Volume)

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone,e dimensões indicadas na figura.O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

Utilize 3 como aproximação para π.



O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é:

a) 6.
b) 16.
c) 17.
d) 18.
e) 21.

Resolução: De acordo com o formato do silo, segue que seu volume é dado por:

$$V = V_{cilindro} + V_{cone} = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h \ ,$$

sendo *R, H, r* e *h* o raio e a altura do cilindro e o raio e a altura do cone, respectivamente.

De acordo com a imagem, segue que: $R = r = 3m$, $H = 12m$ e $h = 3m$, logo, considerando $\pi = 3$:

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h = 3.3^2.12 + \frac{1}{3}.3.3^2.3 = 324 + 27 = 351m^3.$$

Como a carga máxima de cada caminhão é de $20m^3$, segue que a quantidade mínima de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é dado por:

$$\frac{351}{20} = 17,55.$$

Como a quantidade de viagens é um número natural, o número mínimo de viagens é 18.

Alternativa: D

4.2.7 Esferas

(ENEM 2009 - Q. 157 - Volume)

Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.

Sabendo que a capacidade da caixa é de $13824cm^3$, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

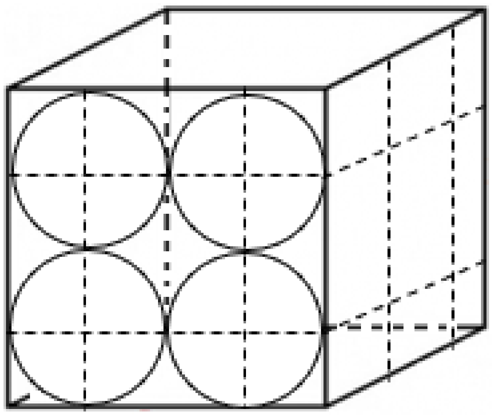
a) 4. b) 8. c) 16.

d) 24. e) 32.

Resolução: Como o volume de um cubo de aresta a é a^3, segue que a medida da aresta da caixa de madeira, que tem volume 13824 cm^3, é, em cm:

$$a^3 = 13824 \Rightarrow a = \sqrt[3]{12824} = 24$$

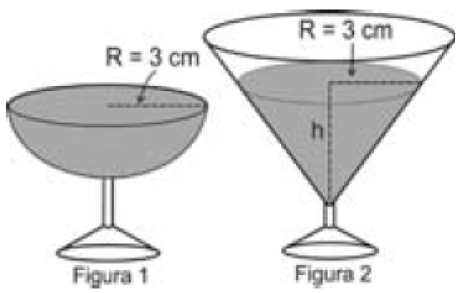
Como o raio da esfera é de 6 cm, seu diâmetro é $6x2 = 12cm$. Sendo a aresta da caixa de 24 cm, "cabem $\frac{24}{12}$ = 2 bolas em cada dimensão do cubo, ou seja, 2 no comprimento, 2 na largura e 2 na altura", totalizando 2^3 = 8 bolas na caixa.



Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 168 - Volume)

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

a) 1,33. b) 6,00. c) 12,00.

d) 56,52. e) 113,04.

Resolução: O volume da taça em formato de um hemisfério, em cm^3, é:

$$\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.3^3 = 18\pi.$$

Como os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual, segue que o volume de champanhe a ser colocado na taça em formato de cone deve ser igual a $18\pi cm^3$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{3}.\pi.R^2 h = 18\pi \Rightarrow \\ \frac{1}{3}.\pi.3^2.h = 18\pi \Rightarrow \\ 3h = 18 \Rightarrow \\ h = 6cm.\end{gathered}$$

Alternativa: B

4.3 Trigonometria

4.3.1 Semelhança de triângulos

(ENEM 2009 - Q. 154)

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a) 1,16 metros. b) 3,0 metros. c) 5,4 metros..

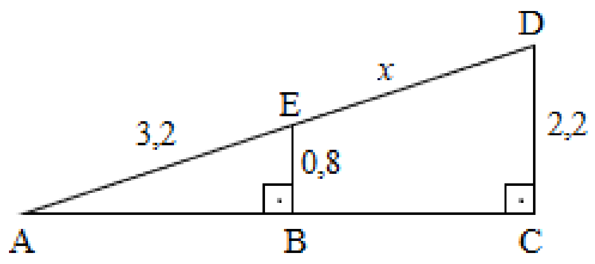
d) 5,6 metros. e) 7,04 metros.

Resolução: Consideremos que a figura abaixo ilustra a situação apresentada no exercício.

Notemos que os triângulos ABE e ACD são semelhantes, devido ao caso de semelhança AA (Ângulo, Ângulo): dois triângulos são semelhantes se possuírem dois ângulos correspondentes congruentes. Nos triângulos considerados, o ângulo interno do vértice A é comum aos dois triângulos e os ângulos retos nos vértices B e C são correspondentes congruentes.

Dessa semelhança, segue:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} \Rightarrow$$



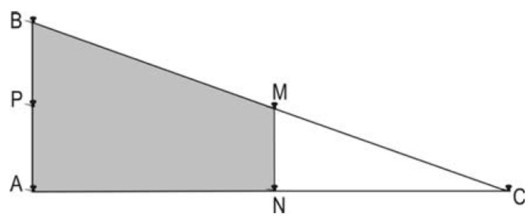
$$\begin{aligned}\frac{3,2}{3,2+x} &= \frac{0,8}{2,2} \Rightarrow\\ 3,2+x &= \frac{3,2x2,2}{0,8} \Rightarrow\\ 3,2+x &= \frac{7,04}{0,8} \Rightarrow\\ x &= 5,6m.\end{aligned}$$

Portanto, a distância, em metros, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é 5,6.

Alternativa: D

(ENEM 2010 - Q. 152)

Em canteiros de obras de construção civil é perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano.Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas,três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo,conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto. Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

a) À mesma área do triângulo AMC.

b) À mesma área do triângulo BNC.

c) À metade da área formada pelo triângulo ABC.

d) Ao dobro da área do triângulo MNC.

e) Ao triplo da área do triângulo MNC.

Resolução: De acordo com o enunciado, os triângulos ABC e MNC são semelhantes, pelo mesmo caso apontado no exercício anterior (Ângulo, Ângulo). A razão de semelhança (k) pode ser dada por:

$$k = \frac{\overline{AC}}{\overline{NC}} = \frac{2.\overline{NC}}{\overline{NC}} = 2.$$

Logo, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e MNC é igual a:

$$k^2 = 2^2 = 4.$$

Assim, denotando por A_T e A_C a região do triângulo MNC e a região a ser calçada com concreto, respectivamente, segue que:

$$\frac{A_T + A_C}{A_T} = k^2 \Rightarrow$$

$$\frac{A_T + A_C}{A_T} = 4 \Rightarrow$$

$$A_T + A_C = 4A_T \Rightarrow$$

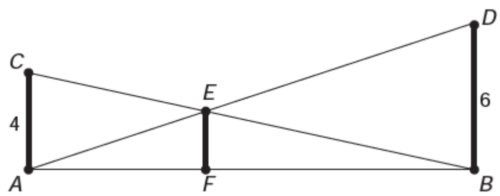
$$A_C = 3A_T$$

Ou seja, a área a ser calçada corresponde ao triplo da área do triângulo MNC.

Alternativa: E

(ENEM 2013 - Q. 172)

O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m.　　b) 2 m.　　c) 2,4 m.

d) 3 m.　　e) $2\sqrt{6}m$.

Resolução: Da figura, vemos que os triângulos AEF e ADB, assim como, BEF e BCA são semelhantes, em ambos os casos, devido ao caso de congruência ângulo, ângulo (AA). Da semelhança dos triângulos AEF e ADB, segue:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{6} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} \ (1)$$

Da semelhança dos triângulos BEF e BCA, segue:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} \ (2)$$

Somando membro a membro (1) e (2), obtemos a medida de EF:

$$\frac{\overline{EF}}{6} + \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{EF}}{6} + \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{AF} + \overline{FB}}{\overline{AB}}$$

$$\frac{\overline{EF}}{6} + \frac{\overline{EF}}{4} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\overline{EF} + 3\overline{EF}}{12} = 1 \Rightarrow$$

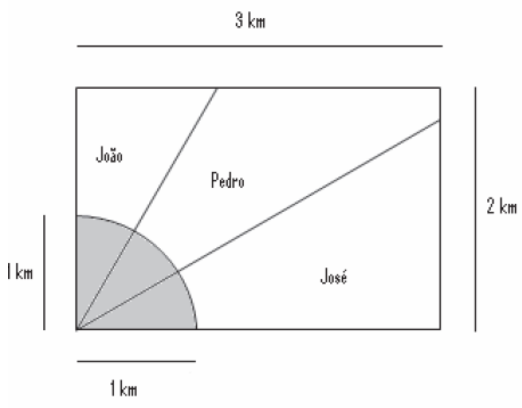
$$\overline{EF} = 2,4cm.$$

Alternativa: C

4.3.2 Relações trigonométricas no triângulo retângulo

(ENEM 2009 - Q. 164)

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km x 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

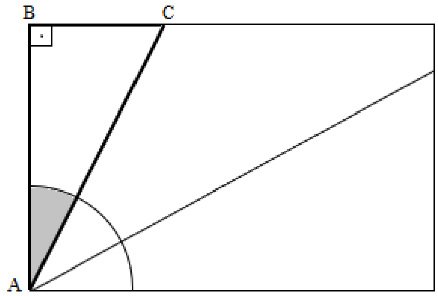


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a :

(considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$)

a) 50 %.
b) 43 %.
c) 37 %.
d) 33 %.
e) 19 % .

Resolução: No triângulo retângulo ABC, destacado na figura seguinte, que corresponde à parte do terreno que coube a João, o ângulo interno do vértice A mede 30º, pois a propriedade foi repartida de modo que cada irmão ficasse com a terça parte da área de extração.



Então, considerando este triângulo, segue:

$$tg30\text{ř} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{BC}}{\overline{2}} \Rightarrow$$

$$0,58 = \frac{\overline{BC}}{\overline{2}} \Rightarrow \overline{BC} = 1,16km$$

Logo, a área destinada a João é, em km^2, igual a:

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{2} = \frac{2.1,16}{2} = 1,16.$$

A área do terreno todo é (2.3) = $6km^2$ então, em relação à proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a:

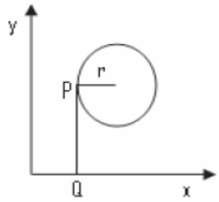
$$\frac{1,16km^2}{6km^2} \cong 0,193 = 19,3\%$$

Alternativa: E

(ENEM 2009 - Q. 174)

Considere um ponto P em uma circunferência de raio r no plano cartesiano. Seja Q a projeção ortogonal de P sobre o eixo x, como mostra a figura, e suponha que o ponto P percorra, no sentido anti-horário, uma distância $d \leq r$ sobre a circunferência.

Então, o ponto Q percorrerá, no eixo x, uma distância dada por:



a) $r(1 - sen\frac{d}{r})$

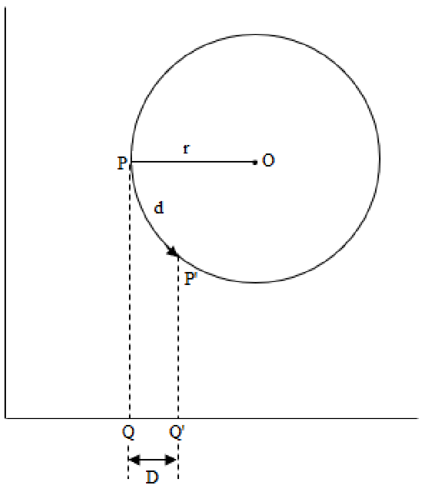
b) $r(1 - cos\frac{d}{r})$.

c) $r(1 - tg\frac{d}{r})$.

d) $rsen(\frac{r}{d})$.

e) $rcos(\frac{r}{d})$.

Resolução: Suponha que o ponto P percorra uma distância d na circunferência, no sentido anti-horário, determinando sobre esta, o ponto P'. Seja Q' a projeção ortogonal de P' sobre o eixo x. O deslocamento d do ponto P sobre a circunferência faz com que o ponto Q percorra uma distância D no eixo x. Queremos determinar D.



Por P', vamos determinar outro raio da circunferência e assim, consequentemente, fica determinado o ângulo α, conforme figura abaixo. A medida de α, ângulo central do setor circular de raio r e comprimento d, é dada por:

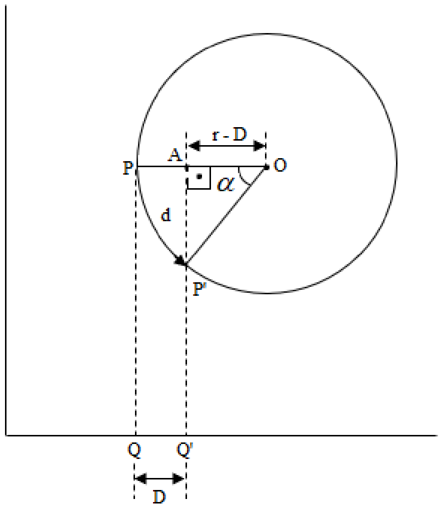
$$\alpha = \frac{d}{r} rad$$

Ao projetarmos o ponto P' sobre o raio OP, determinamos, neste, o ponto A, tal que

$$\overline{AO} = r - D.$$

Considerando o triângulo AOP, retângulo em A, segue:

$$cos\alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{OP}} \Rightarrow$$



$$cos\frac{d}{r} = \frac{r-D}{r} \Rightarrow$$

$$rcos\frac{d}{r} = r - D \Rightarrow$$

$$D = r - rcos\frac{d}{r} \Rightarrow$$

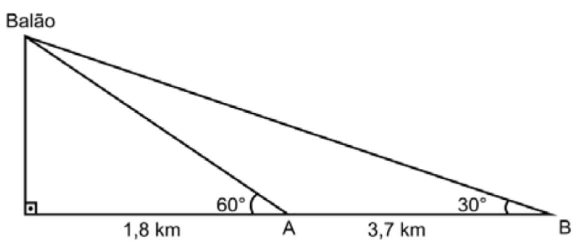
$$D = r(1 - cos\tfrac{d}{r})$$

Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 160)

Um balão atmosférico, lançado em Bauru(343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o comprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br. Acesso em: 02 maio 2010.



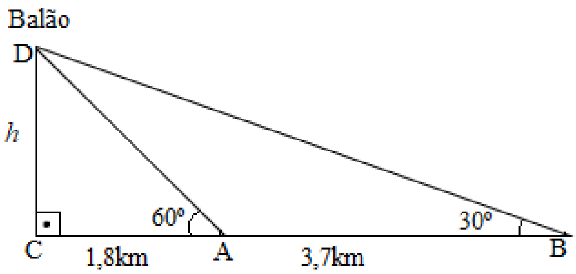
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura,e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km. b) 1,9 km. c) 3,1 km.

d) 3,7 km. e) 5,5 km.

Resolução: Consideremos a figura abaixo e $\sqrt{3} = 1,7$.



Então, do triângulo retângulo ADC, segue:

$$tg60ř = \frac{h}{\overline{AC}} \Rightarrow$$
$$\sqrt{3} = \frac{h}{1,8} \Rightarrow$$
$$h \cong 1,8x1,7 = 3,06km.$$

Logo, a altura aproximada em que se encontrava o balão era 3,1km.

Poderíamos ter considerado o triângulo BDC e, então, obteríamos:

$$tg30ř = \frac{h}{\overline{CB}} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{5,5} \Rightarrow$$
$$h \cong \frac{5,5x1,7}{3} = 3,11km.$$

Alternativa: C

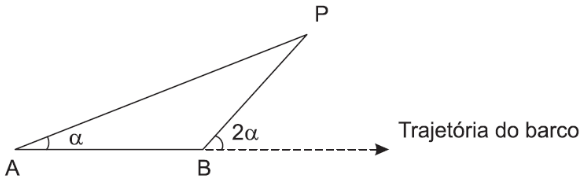
(ENEM 2011 - Q. 158)

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

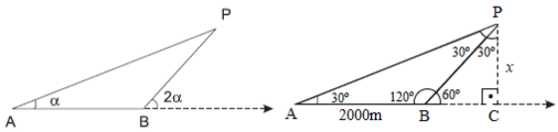
Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30ř$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $AB = 2000m$. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a) 1000 m. b) $1000\sqrt{3}m$. c) $2000\frac{\sqrt{3}}{3}m$

d) 2000 m. e) $2000\sqrt{3}m$.



Resolução: Sendo $\alpha = 30$ž, segue que $2\alpha = 60$ž e, consequentemente, obtemos as demais medidas dos ângulos internos dos triângulos ABP e BCP, indicados na figura abaixo.



Vemos que o triângulo ABP é isósceles de base AP, logo, $\overline{BP} = 2000m$ e, então, no triângulo BCP, seque que a medida x, que representa a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

$$sen60ř = \frac{x}{\overline{BP}} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2000} \Rightarrow$$
$$x = 1000\sqrt{3}m.$$

Também poderíamos ter utilizado o ângulo de 30º e seu cosseno:

$$cos30ř = \frac{x}{\overline{BP}} \Rightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2000} \Rightarrow$$
$$x = 1000\sqrt{3}m.$$

Alternativa: B

(ENEM 2013 - Q. 156)

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

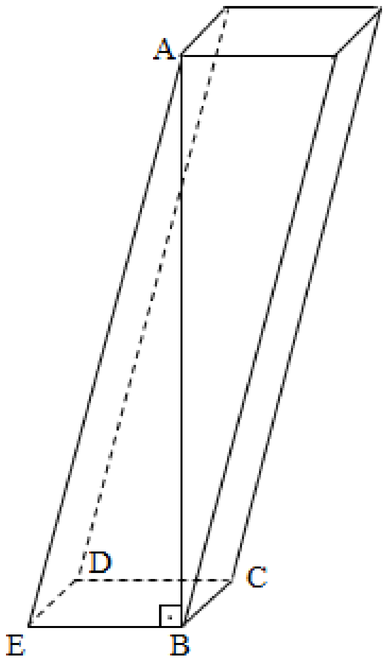
Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

a) Menor que $100m^2$.
b) entre $100m^2$ e $300m^2$.
c) entre $300m^2$ e $500m^2$.
d) entre $300m^2$ e $500m^2$.
e) maior que $700m^2$.

Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012.

Resolução: Admitindo-se que o ponto B seja um dos vértices do quadrado BCDE da base, no triângulo ABC, retângulo em B e BÂC = 15ř, segue que:

$$tg15ř = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \Rightarrow$$
$$0,26 = \frac{\overline{BE}}{114} \Rightarrow \overline{BE} = 29,64m$$



Então, a área S do quadrado BCDE, em metros quadrados, é:

$$S = (\overline{BC})^2 = (29,64)^2 = 878,5296$$

Logo, a área da base do prédio ocupa na avenida um espaço maior que $700m^2$.

Alternativa: E

4.3.3 Funções trigonométricas

(ENEM 2010 - Q. 161)

Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1+0,15xcos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12 765 km.
b) 12 000 km.
c) 11 730 km.
d) 10 965 km.
e) 5 865 km.

Resolução: Como r é dado em função de t por

$$r(t) = \frac{5865}{1+0,15cos(0,06t)}$$

segue que *r* atinge seu valor máximo quando o denominador for o menor positivo possível. Como $0,5cos(0,06t)$ será somado a 1, o denominador assumirá o menor valor quando $cos(0,06t)$ for o menor possível. Lembrando que, para qualquer $x\epsilon\mathbb{R}$, $-1 \geq cosx \geq 1$, segue que $cos(0,06t)$ deve ser igual a -1 e, então:

$$r_{máximo} = \frac{5865}{1+0,15.(-1)} = \frac{5865}{0,85} = 6900km.$$

Analogamente, *r* atinge seu valor mínimo quando o denominador for o maior possível, ou seja, quando $cos(0,06t) = 1$. Logo:

$$r_{mínimo} = \frac{5865}{1+0,15} = \frac{5865}{1+0,15} = \frac{5865}{1,15} = 5100km.$$

Então o cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

$$S = r_{máximo} + r_{mínimo} = 6900 + 5100 = 12000km$$

Alternativa: B

(ENEM 2015 - Q. 176)

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística(IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5cos((\pi * x - \pi)/6)$,onde x representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

a) janeiro. b) abril. c) junho.

d) julho. e) outubro.

<u>Resolução</u>: O mês de produção máxima ocorre quando o preço é mais baixo. Como o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal é descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5cos(\frac{\pi x - \pi}{6}),$$

onde x representa o mês do ano, segue que o preço será mais baixo quando $\cos(\frac{\pi x - \pi}{6})$ assumir o menor valor possível, ou seja, -1:

$$cos(\frac{\pi x - \pi}{6} = -1$$

Como $\cos\pi = -1$, podemos considerar $\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi$, logo:

$$\begin{gathered}\frac{\pi x - \pi}{6} = \pi \Rightarrow \\ \pi x - \pi = 6\pi \Rightarrow \\ \pi x = 7\pi \Rightarrow \\ x = 7.\end{gathered}$$

Logo, na safra, o mês de produção máxima desse produto é julho, pois este corresponde a x =7.

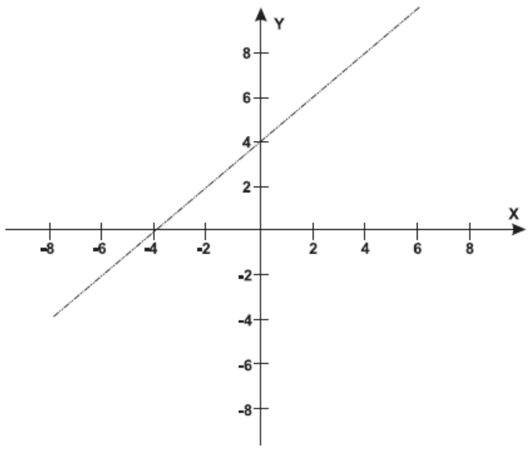
Alternativa: D

4.4 Geometria Analítica

4.4.1 Ponto e reta

(ENEM 2011 - Q. 152 - Distância entre pontos)

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P = (-5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

a) (-5,0). b) (-3,1). c) (-2,1).

d) (0,4). e) (2,6).

Resolução: Inicialmente, podemos observar que, dentre as alternativas, apenas B, D e E apresentam pontos (B(-3,1),D(0,4) e E(2,6))que pertencem à reta de equação y=x+4. Como essa reta representa o planejamento do percurso da linha do metrô, apenas os pontos descritos nessas alternativas podem receber a estação do metrô. Então vamos calcular a distância de cada um destes pontos até o ponto P(-5,5) e ver qual atende a solicitação feita pela comunidade. Lembremos que, dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância entre eles é dada por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$\bullet d_{PB} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{(-5-(-3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} < 5;$$

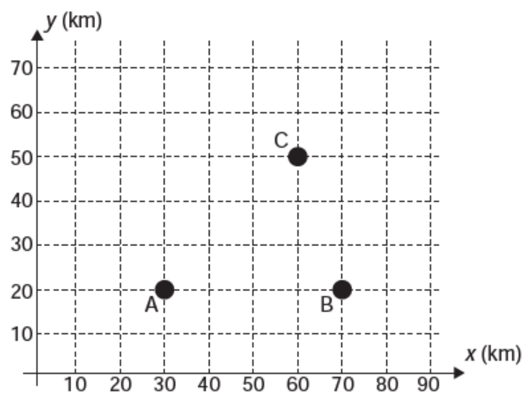
$$\bullet d_{PD} = \sqrt{(x_P - x_D)^2 + (y_P - y_D)^2} = \sqrt{(-5-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (1)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26} > 5;$$

$$\bullet d_{PE} = \sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2} = \sqrt{(-5-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} > 5.$$

Portanto, já estava prevista a construção de uma estação no ponto (-3,1).
Alternativa: B

(ENEM 2013 - Q. 168 - Distância entre pontos)

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.
O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

a) (65 ; 35). b) (53 ; 30). c) (45 ; 35).

d) (50 ; 20). e) (50 ; 30).

Resolução: Seja $P(x_P, y_P)$ o local da construção da nova torre de transmissão, que é equidistante das antenas A(30,20), B(70,20) e C(60,50). O ponto P pertence à mediatriz do segmento AB e, como AB é paralelo ao eixo x, segue que:

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{30+70}{2} = 50.$$

Como P é equidistante de B e C (assim como de A), segue que:

$$d_{PC} = d_{PB} \Rightarrow \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (Y_C - Y_C)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (Y_P - Y_B)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(50-60)^2+(y_p-50)^2} = \sqrt{(50-70)^2+(y_P-20)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{100+y_P^2-100y_P+2500} = \sqrt{400+y_P^2-40y_P+400}$$

$$100+y_P^2-100y_P+2500 = 400+y_P^2-40Y_P+400$$

$$\Rightarrow 60y_P = 1800$$

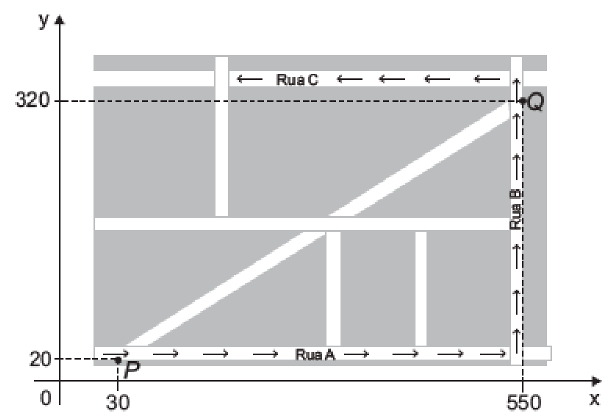
$$\Rightarrow y_P = 30$$

Portanto, o local adequado para a nova construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas (50,30).

Alternativa: E

(ENEM 2015 - Q. 168 - Distância entre pontos)

Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.
De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

a) (290 ; 20). b) (410 ; 0). c) (410 ; 20).

d) (440 ; 0). e) (440 ; 20).

Resolução: Considerando o sistema de coordenadas ortogonais dado, seque que: P(30,20) e Q(550,320). Então, a distância d percorrida pelo ônibus entre as paradas P e Q, no trajeto indicado no enunciado, é dado pela soma entre as diferenças das abscissas e das ordenadas de P e Q, respectivamente, ou seja:

$$d = (x_Q - x_P) + (y_Q - y_P) = (550-30) + (320-20) = 520+300 = 820u.m.$$

O novo ponto T deve ser instalado no percurso indicado e a distância percorrida entre os pontos P e T deve ser igual à metade da distância percorrida entre P e Q, ou seja:

$$\frac{820}{4} = 410u.m.$$

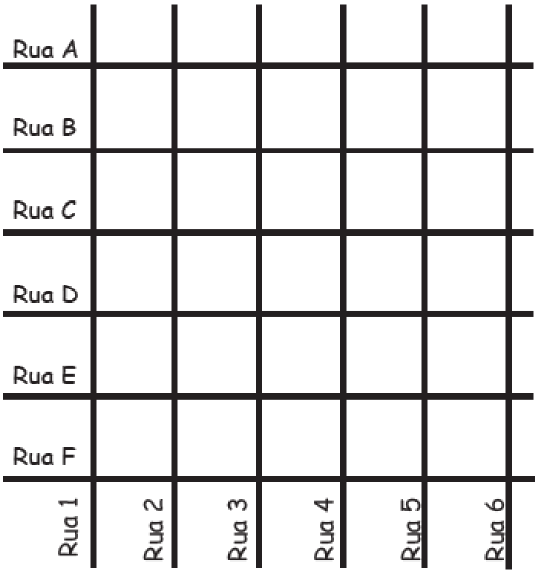
Então, as coordenadas do novo ponto T de parada são:

$$x_T = x_P + 410 = 30 + 410 = 440 \Rightarrow y_T = 20 \Rightarrow T(440, 20)$$

Alternativa: E

(ENEM 2016 - Q. 165 - Distância entre pontos)

Uma família resolveu comprar um imóvel num bairro cujas ruas estão apresentadas na figura. As ruas com nomes de letras são paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números. Todos os quarteirões são quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas têm a mesma largura, permitindo caminhar somente nas direções vertical e horizontal. Desconsidere a largura das ruas.

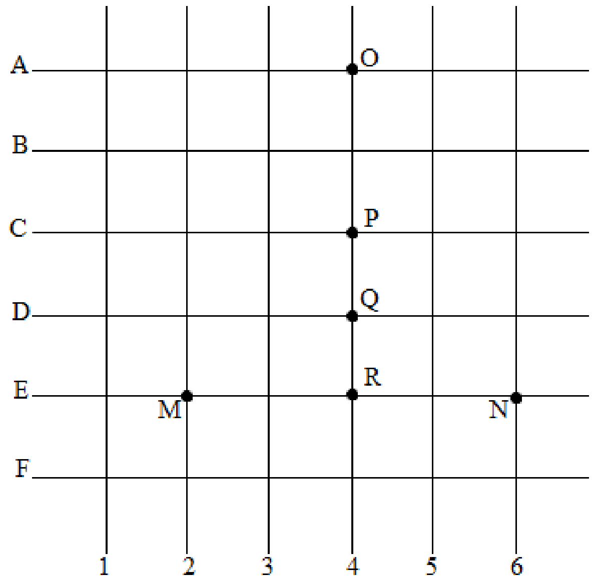


A família pretende que esse imóvel tenha a mesma distância de percurso até o local de trabalho da mãe, localizado na rua 6 com a rua E, o consultório do pai, na rua 2 com a rua E, e a escola das crianças, na rua 4 com a rua A.

Com base nesses dados, o imóvel que atende as pretensões da família deverá ser localizado no encontro das ruas

a) 3 e C.
b) 4 e C.
c) 4 e D.
d) 4 e E.
e) 5 e C.

Resolução: De acordo com o enunciado, podemos indicar o local de trabalho da mãe, o consultório do pai e a escola das crianças, respectivamente, pelos pontos N, M e P. Como a família pretende que o imóvel tenha a mesma distância de percurso até N, M e P, segue que o imóvel deve estar localizado na rua 4, pois este estará sobre a mediatriz do segmento MN. Isso decorre do fato de as ruas com nomes de letras serem paralelas entre si e perpendiculares às ruas identificadas com números e, ainda, por todos os quarteirões serem quadrados, com as mesmas medidas, e todas as ruas com a mesma largura. Dentre as alternativas, as únicas possíveis, então, passam a ser b) 4 e C, c) 4 e D e d) 4 e E. Sejam P, Q e R os pontos que representam, respectivamente, cada uma destas alternativas.



Analisemos cada uma delas, considerando que a distância entre cada quarteirão seja 1 unidade de medida (1 u.m.):

• b) 4 e C : $d_{MP} = 4u.m.$, $d_{NP} = 4$ u.m. e$d_{OP} = 2u.m.$, logo, não pode ser a alternativa b);

• c) 4 e D: $d_{MQ} = 3u.m.$, $d_{NQ} = 3u.m.$ e $d_{OQ} = 3u.m.$, logo, esta alternativa atende ao desejo da família;

• d) 4 e E: $d_{MR} = 2u.m.$, $d_{NR} = 2u.m.$ e $d_{OR} = 4u.m.$, logo, não pode ser a alternativa d).

Alternativa: C

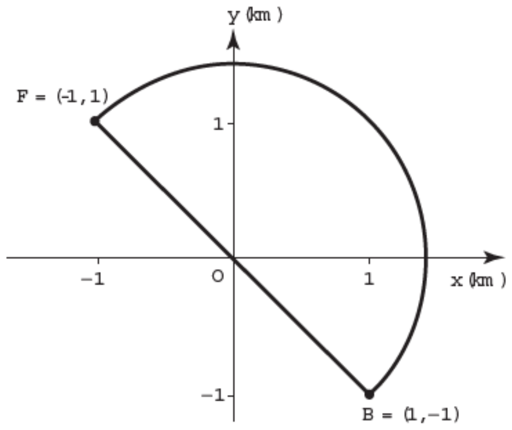
(ENEM 2016 - Q. 171 - Distância entre pontos)

Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.

Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.



O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de:

a) 1 260. b) 2 520. c) 2 800.

d) 3 600. e) 4 000.

Resolução: Vamos calcular a medida do trajeto na linha reta e do trajeto na semicircunferência.

• Linha reta: $d_{FB} = \sqrt{(x_F - x_B)^2 + (Y_F - y_B)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.1,4 = 2,8km = 2800m$;

Semicircunferência:$med_{arcoFB} = \frac{1}{2}.2\pi r$, sendo r o raio da circunferência, ou seja, $r = \frac{1}{2}d_{FB} = \frac{1}{2}2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, logo, $med_{arcoFB} = \frac{1}{2}.2\pi.\sqrt{2} = \pi.\sqrt{2} = 3.1,4 = 4,2km = 4200m$.

Vamos, agora, determinar o tempo para cada uma das construções.

•Linha reta: 1m demora 1h, logo, 2800 m demorarão 2800 horas;

•Semicircunferência: 1m demora 0,6h, logo, 4200 m demorarão 4200.0,6=2520 horas.

Portanto, o menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de 2520 horas.

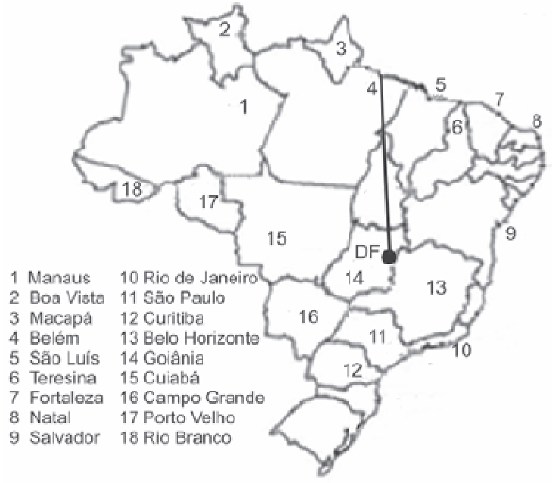
Alternativa: B

(ENEM 2009 - Q. 165 - Planos cartesianos)

Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades,estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

SIQUEIRA, S. Brasil Regiões. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135o graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em:



a) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.

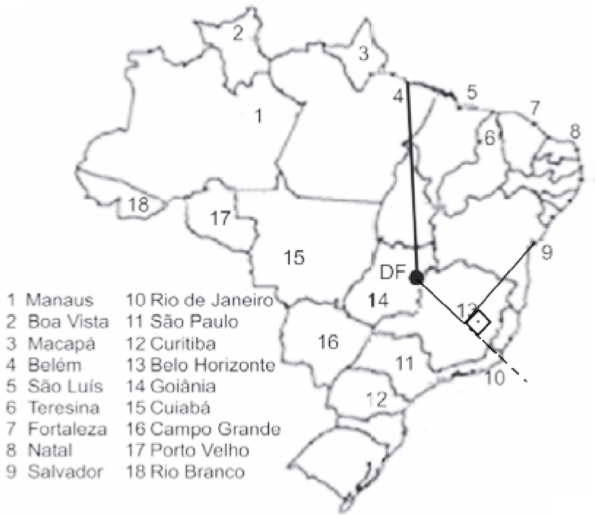
b) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.

c) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.

d) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.

e) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

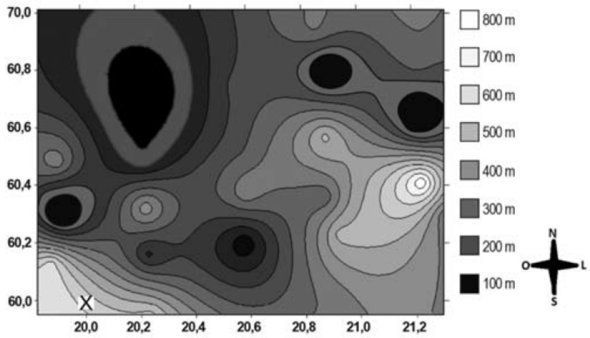
Resolução: De acordo com o enunciado, podemos organizar o trajeto apontado na figura abaixo e, então, concluirmos que Carlos fez conexão em Belo Horizonte (13) e, em seguida, embarcou para Salvador (9).



Alternativa: B

(ENEM 2010 - Q. 147 - Planos cartesianos)

A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto X = (20; 60). O helicóptero segue o percurso:

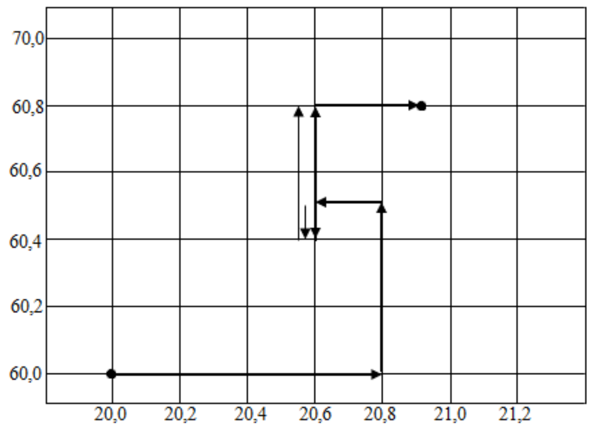
$0,8\text{ř}L \rightarrow 0,5\text{ř}N \rightarrow 0,2\text{ř}O \rightarrow 0,1\text{ř}S \rightarrow 0,4\text{ř}N \rightarrow 0,3\text{ř}L.$

Ao final, desce verticalmente até pousar o solo.

De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é:

a) Menor ou igual a 200 m.
b) Maior que 200 m e menor ou igual a 400 m.
c) Maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.
d) Maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.
e) Maior que 800 m.

Resolução: Nas figuras abaixo, as setas indicam a trajetória percorrida pelo helicóptero, em relação ao solo.



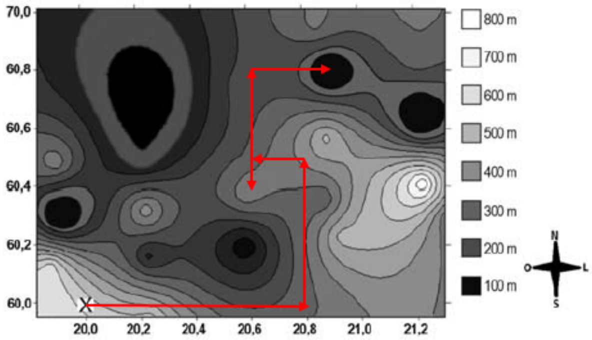
Então o helicóptero pousou em uma região de altitude menor ou igual a 200 m.

Alternativa: A

(ENEM 2011 - Q. 175 - Raciocínio Lógico)

O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:



Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

a) $X = Y < Z$. b) $Z < X = Y$. c) $Y < Z < X$.

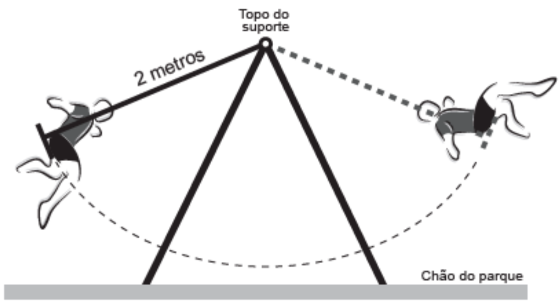
d) $Z < X < Y$. e) $Z < Y < X$.

Resolução: O enunciado aponta que o técnico deve revisar todos os pontos de saída de ar, mas não afirma que a revisão deva ocorrer, necessariamente, em todas as tubulações. Então, admitindo-se que o técnico sempre ande sobre segmentos determinados pelas tubulações, iniciando a revisão em K, terminando em F, sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será feito passando pelos pontos K, L, G, I, J, H e F.

Alternativa: C

(ENEM 2014 - Q. 167)

A figura mostra um criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

a) $f(x) = -\sqrt{2-x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{2-x^2}$ c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Resolução: Como a criança se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal, o assento do balanço está sempre abaixo do topo do suporte, ou seja, y<0, já que a origem do plano cartesiano está localizada no suporte do balanço. Além disso, o assento do balanço está sempre a 2 metros da origem. Logo, considerando o metro como unidade, segue, também, que: $x^2 + y^2 = 2^2$, que corresponde à equação da circunferência de centro na origem e raio 2.

Portanto, a curva determinada pela trajetória do assento é parte do gráfico de y=f(x) tal que:

$$\begin{cases} y < 0 \\ x^2 + y^2 = 2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 0 \\ y^2 = 4 - x^2 \end{cases} \Rightarrow y = -\sqrt{4-x^2}$$

Assim, $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$.
Alternativa: D

4.4.2 **Cônicas**

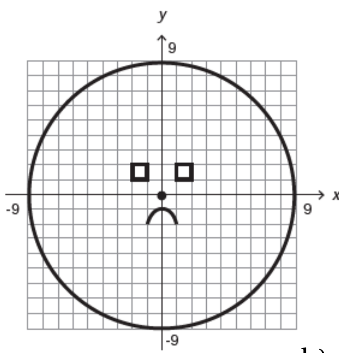
(ENEM 2013 - Q. 142 - Circunferência e parábola)

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

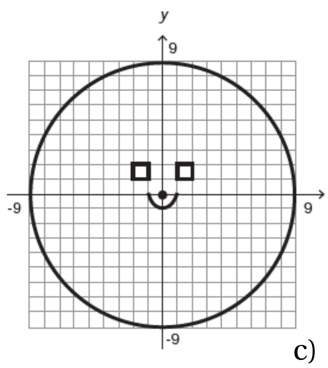
I- É a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;
II- É a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;
III- É o quadrado formado pelos vértices $(-2,1), (-1,1), (-1,2) e (-2,2)$;
IV- É o quadrado formado pelos vértices $(1,1), (2,1), (2,2) e (1,2)$;
V- É ponto $(0,0)$;

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

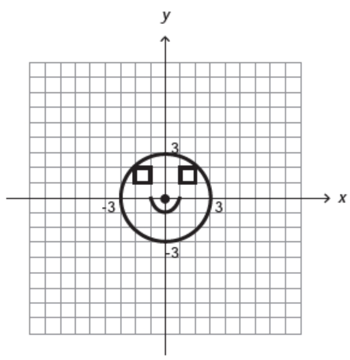
Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



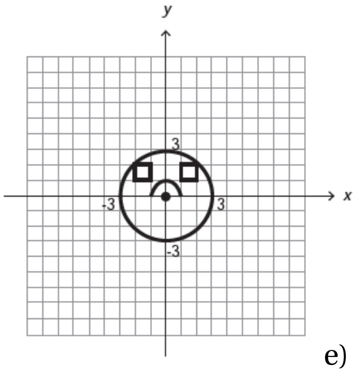
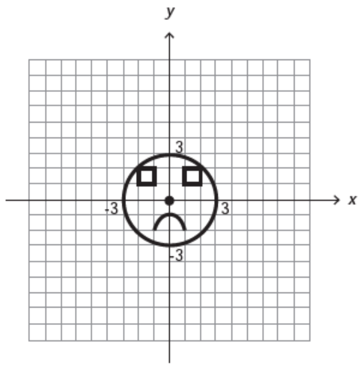
a)



b)



c)

d) 
e) 

Resolução: Vamos analisar, geometricamente, os conjuntos algébricos:

•I: circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$, corresponde à circunferência de centro na origem e raio 3, logo, já podemos descartar as alternativas a) e b);

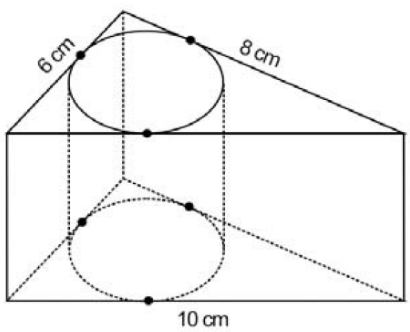
•II: parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1, corresponde à parábola com concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Apenas com essa análise, já eliminamos a alternativa c). Além disso, a parábola intercepta o eixo y em (0,-1), ponto obtido fazendo x=0 na equação da parábola. Logo, a única alternativa correta é a letra e).

Podemos observar que os demais conjuntos algébricos estão representados igualmente nas alternativas d) e e), que são os quadrados (III e IV) e o ponto (V).

Alternativa: E

(ENEM 2010 - Q. 164 - Tangência)

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

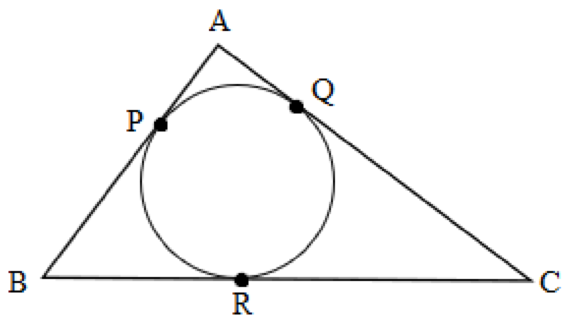


O raio da perfuração da peça é igual a:

a) 1 cm. b) 2 cm. c) 3 cm.

d) 4 cm. e) 5 cm.

Resolução: Sejam A, B e C, vértices do triângulo de uma das bases do prisma, P, Q e R os pontos de tangência entre o círculo da base do cilindro circular reto e o triângulo de uma das bases do prisma.



Segue, da tangência entre o círculo e o triângulo, que:

• $\overline{BP} = \overline{BR}$;

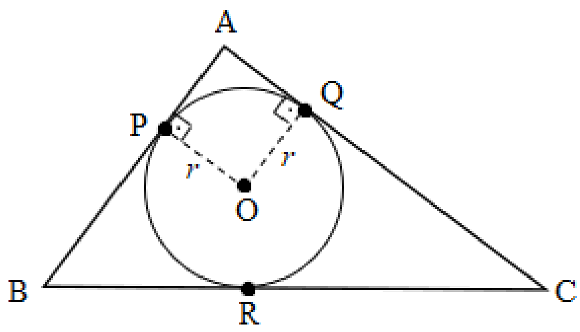
• $\overline{AP} = \overline{AQ}$;

• $\overline{CR} = \overline{CQ}$

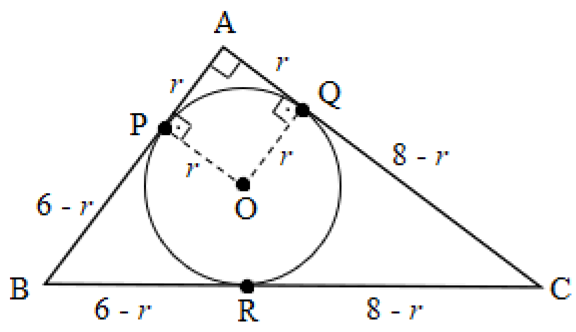
E, ainda,

• quando um segmento de reta é tangente à circunferência, a distância do centro da circunferência ao segmento é o raio;

• o segmento de reta que é tangente à circunferência é sempre perpendicular ao raio no ponto de tangência.



Utilizando os resultados acima e o fato de o triângulo de medidas 6, 8 e 10 ser retângulo, segue:



$$\begin{gathered}10 = (6 - r) + (8 - r) \Rightarrow \\ 10 = 14 - 2r \Rightarrow \\ r = 2\end{gathered}$$

Alternativa: B

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricula**r. Brasília, DF, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br//site/inicio. Acesso em: 17 jun. 2018.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Provas e Gabaritos**. Brasília: INEP, 2005. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em: 09 out. 2017.

BRAZ, Lúcia Helena Costa; SILVA, M. A. A. . A contextualização no ensino de matemática: concepções de professores que lecionam matemática no ensino m**édio nas escolas públicas de Formiga (MG).** Anais ... In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 2017, Canoas. Anais do VII CIEM, 2017.

BRAZ, Lúcia Helena Costa; SILVA, M. A. A. . A contextualização nas avaliações de Matemática dos professores que atuam no Ensino Médio nas escolas públicas de Formiga (MG). **REVISTA FORMAÇÃO@DOCENTE**, v. 11, p. 64-80, 2019.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3ª ed., vol.1 – São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3ª ed., vol.2 – São Paulo: Ática, 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. 3ª ed., vol.3 – São Paulo: Ática, 2017.

MINAS GERAIS. Secretaria de Estado da Educação de Minas Gerais. **CBC – Conteúdo Básico Comum**. Proposta Curricular. Matemática Ensinos Fundamental e Ensino Médio, 2002.