

## EVOLUÇÃO POPULACIONAL DE FORMIGA – MG E SEU AJUSTE POR UM MODELO EXPONENCIAL ASSINTÓTICO

SILVA, Bruna Maria<sup>1</sup>; SÁ, Daiana Luiza<sup>1</sup>; DOMINGUES, José Sérgio<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) - *Campus* Formiga. E-mail: bruninhagta@hotmail.com.br, daianasa12@outlook.com

<sup>2</sup>Professor orientador do IFMG - *Campus* Formiga. E-mail: sergio.domingues@ifmg.edu.br

**Resumo:** O objetivo deste trabalho foi desenvolver um modelo matemático que dentre um grupo de possíveis tipos melhor se ajustasse à população da cidade de Formiga – MG. Para isso, foram analisados os de ajuste linear, exponencial, geométrico e exponencial assintótico, sendo esse último o que melhor se adequou aos dados utilizados. Para uso do deste foi necessário calcular a população limite da cidade e, para isso, foi utilizado o método de Ford-Walford. Depois de obtido o modelo foi feito um estudo da diferença percentual entre as previsões feitas por ele e os dados oficiais do IBGE. Como resultado, obteve-se diferença percentual média de 3,81%, indicando boa aproximação do modelo proposto e os dados oficiais. A diferença percentual entre a previsão do deste e do IBGE para o ano corrente, 2019, foi de apenas 1,58%. Também foram feitas previsões das populações de Formiga para os anos de 2020 a 2050, que futuramente poderão ser comparadas com os dados oficiais que ainda serão coletados pelo órgão responsável. Conclui-se que o modelo obtido pode ser aplicado em situações diversas em que se queira determinar o número aproximado de habitantes da cidade para qualquer ano entre 1950 e 2050, além de ser o primeiro modelo matemático, nesses moldes, para essa cidade, ao qual se tem registro no meio acadêmico.

**Palavras-chave:** Evolução populacional. Modelagem matemática. Exponencial assintótico.

### 1 INTRODUÇÃO

Formiga, localizada no centro-oeste mineiro, é caracterizada como a cidade capital do trabalho feminino, com a maior concentração do país de pequenas confecções que produzem para as grifes (CHAIM, 2000). O jeans é o produto mais popular da produção formiguense:, respondendo por 80% do total de corte e costura. Além disso, o município é também marcado pela produção de peças de grifes, como Ellus, Forum, MCD, Siberian Husky, Calvin Klein, dentre muitas outras. Formiga situa-se a cerca de 190 quilômetros de Belo Horizonte e, segundo o último censo, tem uma população aproximada de 65.128 habitantes (IBGE, 2010).

Observando o crescimento populacional de Formiga entre 2000 e 2010, a cidade cresceu a uma taxa média anual de 0,35%, enquanto no Brasil o valor foi de 1,17%, no mesmo período. Nesta década, a taxa de urbanização do município passou de 88,38% para 91,34%. Nesses mesmos anos, a razão de dependência (percentual da população com menos de 15 anos) no município passou de 47,81% para 40,50%, e a taxa de envelhecimento

(população com mais de 65 anos), de 7,26% para 9,76%. Em 1991, esses dois indicadores eram, respectivamente, 56,51 e 5,93% (IDHM, 2013).

Desde 1973, o IBGE atua no campo das projeções populacionais brasileiras, utilizando o Método das Componentes Demográficas, que considera as três componentes da dinâmica populacional: mortalidade, fecundidade e migração. Sendo assim, as projeções feitas com essa metodologia proporcionam a formulação de várias hipóteses referentes a diversos cenários (FREIRE, 2001; IBGE, 2010).

Logo, é possível criar modelos matemáticos cujas previsões populacionais podem ser comparadas com as do IBGE, além de permitirem que isso ocorra ano a ano, informações que o IBGE, em geral, não disponibiliza. Além disso, não existem relatos de estudos para obtenção de modelos matemáticos para a população de Formiga, o que torna essa pesquisa totalmente inédita. Então, o principal objetivo desse trabalho é construir e analisar, dentre um grupo de tipos clássicos de modelos matemáticos de ajustes de dados, qual deles melhor se enquadra na evolução populacional de Formiga. Para tanto, foram criados e analisados os modelos de ajuste linear, exponencial, geométrico e exponencial assintótico, sendo esse último o que apresentou menor diferença percentual entre as previsões do modelo e os dados do IBGE, 3,98%, com a população limite dada por calculada pelo método de Ford-Walford, descrito em BASSANEZI (2011).

## 2 MATERIAIS E MÉTODOS

O desenvolvimento do trabalho deu-se com base na análise de todos os dados populacionais dos censos do IBGE, feitos de 10 em 10 anos, de 1950 a 2010, com passo de 10 anos (Tabela 1). No ano de 1990 não houve censo, no entanto, ele foi realizado em 1991.

Tabela 1 – População de Formiga em função dos anos

Anos ( $t$ )	População ( $()$ )
1950	33275
1960	40010
1970	46864
1980	52395
1991	61727
2000	62907
2010	65128

Fonte: IBGE (2019).

Os modelos linear, exponencial e geométrico não apresentaram bom ajuste aos dados utilizados, com erros percentuais médios iguais a 2,97; 4,70 e 4,60%, respectivamente. Apesar do erro médio do modelo linear ser menor que do modelo exponencial assintótico, até 2010, o

modelo linear considera que a população tende ao infinito à medida que o tempo passa, fazendo com que previsões para anos acima de 2010 sejam muito superiores às previsões oficiais. Para o ano de 2019, por exemplo, a população prevista pelo IBGE é de 67.683, contra 73.407 do modelo linear, representando um erro maior que 8%. Diante da inconsistência desses três modelos, foi considerado que a evolução populacional de Formiga segue o tipo de crescimento exponencial assintótico, ou seja, que pode ser modelada por uma equação do tipo (1).

$$P(t) = P_{\infty} - ae^{bt} \quad (1)$$

- $P(t)$  = população estimada para o ano.
- $P_{\infty}$  = população máxima.
- $a = e^{\alpha}$  ; onde  $\alpha$  é o coeficiente linear da reta de regressão dos dados.
- $b$  = coeficiente angular da reta de regressão dos dados.

Inicialmente, foi necessário calcular a população máxima estimada para a cidade, e, para isso, foi utilizado o método de Ford-Walford, que pode ser aplicado a modelos de dinâmica populacional cujas soluções apresentem um comportamento assintótico  $P = P(t)$ , que tende a se estabilizar com o passar do tempo. Esse método ajusta curvas considerando valores subsequentes de dados  $(P_t, P_{t+1})$ ,  $(P_t = P(t))$ , e busca estabelecer uma função de ajuste,  $P_{t+1} = g(P_t)$ , considerando que próximo ao valor de estabilização  $P_{\infty}$  o valor de  $P_t$  é aproximadamente igual a  $P_{t+1}$ , ie,  $P_t \approx P_{t+1}$ . Sendo a função de ajuste contínua, o valor de estabilização é um ponto fixo de  $g$ , ou seja,  $P_{\infty} = g(P_{\infty})$ . Logo, por esse método o valor de  $P_{\infty}$  é determinado ao se encontrar a função de ajuste  $g$  e resolver o sistema:

$$\begin{cases} P_{t+1} = g(P_t) \\ P_{t+1} = P_t \end{cases}$$

Para os dados populacionais de Formiga, considerou-se que a função de ajuste para os pontos  $(P_t, P_{t+1})$  é linear. Essa função foi a reta de regressão para esses dados. De posse da função linear de ajuste, fez-se a mudança de variável  $z = \ln(P_{\infty} - P)$ , que ao ser aplicada na Eq. (1) permitiu determinar o modelo procurado.

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A função de ajuste linear obtida para os pontos  $(P_t, P_{t+1})$  foi  $P(t+1) = 0,8236P(t) + 13.999$  (2). Fazendo

$P(t+1) = P(t) = P_\infty$  na Eq. (2), chega-se que  $P_\infty = 79360$ . Assim, aplicando esse valor ao modelo da Eq. (1) podemos reescrevê-lo como  $79.360 - P(t) = ae^{bt} \Rightarrow \ln(79.360 - P(t)) = \ln a + bt$ , um novo ajuste linear entre as variáveis  $t$  e  $\ln(79.360 - P(t))$ . A equação desse ajuste é  $\ln(79.360 - P(t)) = -0,021t + 51,667$ . Então, aplicando a função exponencial a ambos os lados dessa última igualdade, chega-se à Eq. (3), modelo exponencial assintótico para a evolução populacional de Formiga.

$$P(t) = 79.360 - 2,746 \cdot 10^{22} e^{-0,021t} \quad (3)$$

A curva que representa a Eq. (3), juntamente com os pontos utilizados para a construção do modelo, o ponto que representa a previsão do IBGE para o ano de 2019 e as previsões do modelo construído nesta pesquisa para os anos de 2020, 2030, 2040 e 2050 podem ser observados na Figura 1.

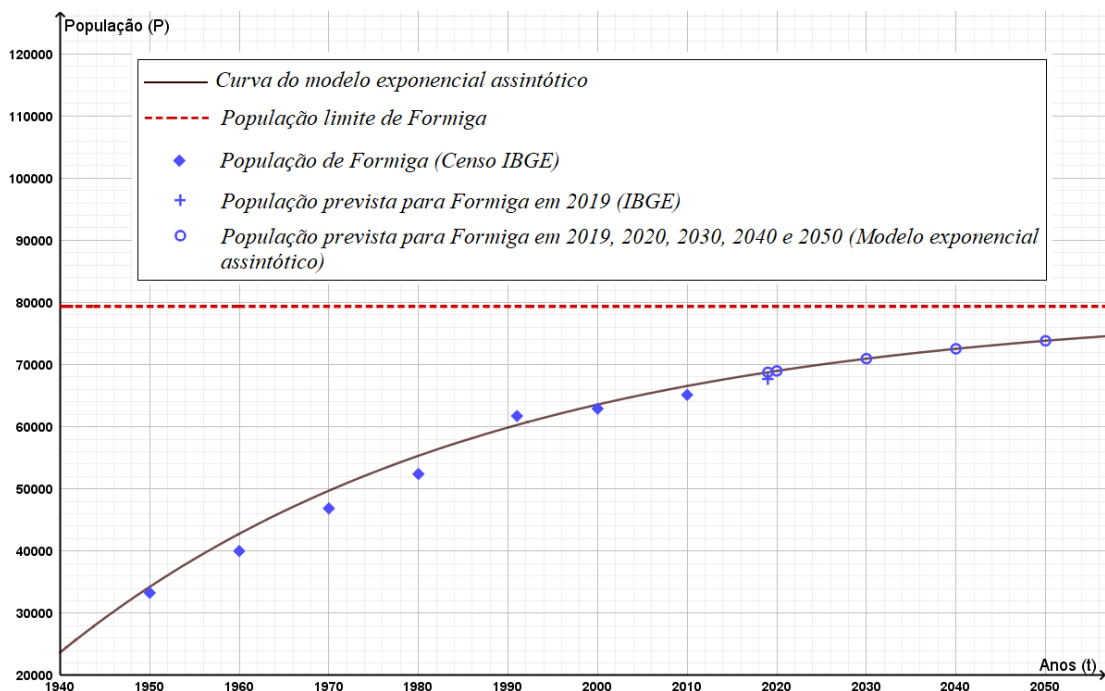


Figura 1 – Representação gráfica do modelo construído nessa pesquisa, da população limite de Formiga, dos pontos utilizados na sua construção e algumas previsões populacionais.

Visualmente, é possível perceber que os dados do IBGE se ajustaram relativamente bem à curva do modelo exponencial assintótico. O estudo das diferenças percentuais entre as populações oficiais do IBGE de 1950 a 2010 e as populações previstas pelo modelo aqui

determinado resultou em uma diferença percentual média de apenas 3,81%. Além disso, a diferença entre a população prevista pelo IBGE em 2019 e a prevista pelo modelo é de somente 1,58%.

É perceptível um aumento mais considerável da população da cidade nos anos de 1950 a 1991. Parte desse aumento pode ser explicada devido à crescente expansão das indústrias de corte e costura, em meados da década de 40. Atualmente, de acordo com o Sindicato das Indústrias do Vestuário de Formiga (SINDVESF), a cidade possui cerca de 200 empresas, 5000 trabalhadores e movimenta 12% da economia ativa do município (GONÇALVES; SANTOS; MACEDO, 2017).

#### 4 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos pode-se concluir que o modelo exponencial assintótico obtido apresenta boa aproximação com os dados oficiais do IBGE, além de fazer previsões com baixo índice percentual de diferença entre os dados oficiais desse instituto. Portanto, ele pode ser útil para se determinar a população da cidade em qualquer ano no intervalo de 1950 a 2050, especialmente porque o IBGE, apesar de ter projeções para além do ano de 2019, não indica projeções ano a ano.

Obviamente, existem outros tipos de modelos de ajuste de dados, como o Logístico e o de Gompertz, que também podem se ajustar bem aos dados populacionais de Formiga. A verificação do grau de aplicabilidade desses modelos na evolução populacional dessa cidade será tema de pesquisa em trabalhos futuros.

#### REFERÊNCIAS

CHAIM, Célia. Formiga vira capital do trabalho feminino. **Folha de São Paulo**, 2000. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/dinheiro/fi3112200018.htm>. Acesso em: 10 de setembro de 2019.

FREIRE, P. H. M. A. **Projeção populacional para pequenas áreas pelo método das componentes demográficas usando estimadores bayesianos espaciais**. 2001. 129 f. Tese (Doutorado em Demografia) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

GONÇALVES, Karen Cristine; SANTOS, Anderson Alves; MACEDO, Sâmara Borges. **Análise da rotatividade de funcionários no setor de facção e confecção em Formiga – MG: um estudo de caso**. Disponível em <https://www.formiga.ifmg.edu.br/documents/2017/PublicacoesTCCsBiblioteca/Gestao/Artigo-TCC.pdf>. Acesso em 10 de setembro de 2019.

ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO MUNICIPAL (IDHM). **Atlas do desenvolvimento humano no Brasil**, 2013. Disponível em :[http://atlasbrasil.org.br/2013/pt/perfil\\_m/formiga\\_mg](http://atlasbrasil.org.br/2013/pt/perfil_m/formiga_mg). Acesso em 10 de setembro de 2019.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE, 2010). Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mg/formiga/panorama>. Acesso em 10 de setembro de 2019.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2011.

**Como citar este trabalho:**

SILVA, B. M.; SÁ, D. L.; DOMINGUES, J. S. Evolução populacional de Formiga/MG e seu ajuste por um modelo exponencial assintótico. *In: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI)*, III., 2019. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *Campus Formiga*, 2019. ISSN- 2674-7111.