A ESTRUTURA DO ESPAÇO DE MINKOWSKI

COUTO, Abraão de Oliveira Ferreira[1]; ANDRADE, Alcides Faria[2]

[1]Estudante do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio do IFMG-*Campus* Formiga, voluntário. E-mail: abraao.ferreira.oliveira@hotmail.com
[2]Professor orientador do IFMG-*Campus* Formiga. E-mail: alcides.andrade@ifmg.edu.br

Resumo: A Teoria Especial da Relatividade necessita de um espaço-tempo completamente diferente do newtoniano. Neste trabalho, estudamos a estrutura algébrica daquele espaço-tempo, conhecido como espaço de Minkowski. Formalmente, ele é um espaço vetorial real quadridimensional, $\boldsymbol{M}^4$, dotado com uma forma bilinear simétrica não degenerada de índice um, a qual induz um produto interno não-euclideano. Sobre $\boldsymbol{M}^4$ também definimos uma transformação linear ortogonal para representar as transformações de Lorentz.

Palavras-chave: Minkowski. Espaço-tempo. Relatividade.

1 INTRODUÇÃO

No final do século XIX, a física ocupava a posição de ciência modelo. Apesar de seu inquestionável sucesso explicativo e ampla aplicação, duas de suas mais importantes teorias, a mecânica de Newton e o eletromagnetismo de Maxwell, apresentavam uma incompatibilidade crucial.

Na mecânica newtoniana, a equação dinâmica fundamental, a segunda lei de Newton, é invariante sob um conjunto de transformações de coordenadas entre os referenciais inerciais, conhecidas como transformações de Galileu. Essas transformações preveem que a velocidade $\boldsymbol{v}$ de um objeto, em um determinado sistema de referência inercial, muda de acordo com a equação

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V},$$

em que $\boldsymbol{v}'$ é a velocidade no novo referencial, e $\boldsymbol{V}$ é a velocidade relativa entre os referenciais inerciais.

O eletromagnetismo, baseado nas equações de Maxwell, estabelece que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo é

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

em que ε_0 e μ_0 são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente.

Aqui surge o seguinte problema: a velocidade da luz, de acordo com a soma galileana de velocidades, deveria mudar de valor com a mudança de referencial, mas de acordo com o eletromagnetismo, ela só deve depender das propriedades eletromagnéticas do meio. Além disso, entre 1881 e 1887, Michelson e Morley realizaram uma série de experimentos para medir desvios na velocidade de propagação da luz em relação à Terra. Para surpresa, o resultado desses experimentos indicou que a velocidade de propagação da luz não varia (NUSSENZVEIG, 2014).

A solução para esse problema foi dada por Einstein, em 1905, quando apresentou uma mecânica, válida para velocidades comparáveis à velocidade de propagação da luz, hoje denominada de Teoria Especial da Relatividade (EINSTEIN, 1952). A formulação de Einstein fundamenta-se nos seguintes postulados: o princípio da relatividade restrita, o qual afirma que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais; e o princípio da constância da velocidade da luz, que estabelece que a velocidade da luz no vácuo, c, é a mesma em todos as direções e em todos os referenciais inerciais, independentemente do estado de movimento da fonte. Com base nesses postulados, Einstein encontrou um novo conjunto de transformações entre os referenciais inerciais, as chamadas transformações de Lorentz.

A teoria especial da relatividade exige um tipo de estrutura para o espaço e o tempo completamente diferente da versão newtoniana, na qual o tempo é independente e sem relação alguma com o espaço, como se apresenta nas transformações de Galileu. As transformações de Lorentz, por sua vez, estabelecem uma relação de interdependência entre o espaço e o tempo, e dela decorrem várias consequências já verificadas, como, por exemplo, a dilatação do tempo, a contração dos comprimentos, a relatividade da simultaneidade e a equivalência entre massa e energia. Esse novo espaço, denominado de espaço-tempo, foi proposto em 1908 por Minkowski (MINKOWSKI, 1952).

O objetivo deste trabalho é construir a estrutura algébrica do espaço de Minkowski estabelecendo o espaço vetorial que formaliza esse cenário, o que permite estabelecer os diferentes tipos de vetores e a relação de causalidade entre os eventos, bem como o tipo de transformação linear que representa as transformações de Lorentz.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Por se tratar de um trabalho essencialmente teórico e formal, foram utilizados livros clássicos sobre os seguintes temas: teoria da relatividade e espaços vetoriais. Neles estão os dois principais elementos para o desenvolvimento desse trabalho: (1) a compreensão do significado físico dos eventos que ocorrem em uma determinada posição e em um instante específico, com relação a um referencial, como também da forma de comunicação entre os diferentes referenciais; (2) a representação formal, ou seja, o tipo de estrutura matemática adequada para aqueles.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O espaço de Minkowski é formalmente um espaço vetorial real, M^4, de quatro dimensões, cujos elementos, $\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3, v^4) \in M^4$, são chamados de eventos.

Sobre M^4 definimos uma forma bilinear $g: M^4 \times M^4 \to \mathbb{R}$, ou seja,

$$g(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}) = a_1 g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{w}) + a_2 g(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}), \text{ e}$$

$$g(\boldsymbol{v}, a_1\boldsymbol{w}_1 + a_2\boldsymbol{w}_2) = a_1 g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1) + a_2 g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_2),$$

Com $a_1, a_1 \in \mathbb{R}$, e $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in M^4$, que seja simétrica

$$g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = g(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}),$$

e não degenerada, isto é, $\forall\ \boldsymbol{w} \in M^4, g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$.

Por meio dessa forma, podemos definir um produto interno não euclidiano,

$$g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 - v^4 w^4,$$

chamado de produto lorentziano (NABER, 2012; O' NEILL, 1983; HOFFMAN, 1971; LANG, 1968; LIMA, 2014).

Esse produto interno induz a seguinte forma quadrática $G: M^4 \to \mathbb{R}$,

$$G(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v^2.$$

Como o produto interno não é positivo definido, existem $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in M^4$ para os quais $G(\boldsymbol{v}) = 0$, esses são os vetores do tipo luz. Se $G(\boldsymbol{v}) > 0$, os vetores são do tipo espaço, e se $G(\boldsymbol{v}) < 0$, eles são do tipo tempo (CARROLL, 2004). Essa distinção entre os vetores de M^4 estabelece uma relação de causalidade entre dois eventos distintos de M^4, e se manifesta na estrutura do cone de luz estabelecendo as regiões de passado e futuro para um dado evento de M^4 (HARTLE, 2003; SCHUTZ, 2009).

Sobre M^4 também definimos uma transformação linear, $L: M^4 \to M^4$, que seja ortogonal e que preserve a forma quadrática $G(L\boldsymbol{v}) = G(\boldsymbol{v})$. Essa transformação possui uma representação matricial, Λ, satisfazendo $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$, e é chamada de transformação de Lorentz, em que Λ^T é a transposta de Λ, e η é a matriz $\eta = \mathrm{diag}(1,1,1,-1)$.

4 CONCLUSÃO

O espaço de Minkowski é o cenário usado para representar o espaço-tempo na teoria especial da relatividade. Apesar de ser um espaço vetorial real, ele não é euclideano, isso significa que ele possui características geométricas distintas do espaço usado na mecânica newtoniana, como, por exemplo, os diferentes tipos de vetores. As transformações ortogonais nesse espaço, isto é, as que preservam a forma quadrática, são as transformações de Lorentz. Delas decorrem vários fenômenos não observados na mecânica de Newton, só aplicada para baixas velocidades. Na teoria especial da relatividade ficam de fora os fenômenos de natureza gravitacional e os referenciais acelerados. Para abordá-los é necessário um tipo de estrutura diferente do espaço vetorial. Para esses casos, existe a Teoria Geral da Relatividade que usa um tipo de estrutura conhecida como variedade diferenciável.

REFERÊNCIAS

CARROLL, Sean M. **Spacetime and Geometry**: an introduction to General Relativity. San Francisco: Pearson Education, 2004. 513 p.

EINSTEIN, Albert. On the eletrodynamics of moving bodies. *In*: LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. **The Principles of Relativity**: a collection of original memoirs on the Special and General Theory of Relativity. New York: Dover Publications, 1952. p. 35-65.

HARTLE, James B. **Gravity**: an introduction to Einstein's General Relativity. San Francisco: Pearson Education, 2003. 582 p.

HOFFMAN, Keneth; KUNZE, Ray. **Linear Algebra**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1971. 407 p.

LANG, Serge. **Linear Algebra**. New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1968. 294 p.

LIMA, Elon Lages. **Álgebra Linear**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 357 p.

MINKOWSKI, H. Space and Time. *In*: LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. **The Principles of Relativity**: a collection of original memoirs on the Special and General Theory of Relativity. New York: Dover Publications, 1952. p. 73-91.

NABER, Gregory L. **The Geometry of Minkowski Spacetime**: an introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity. 2. ed. New York: Springer, 2012. 324 p.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física 4**: ótica, relatividade, física quântica. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2014. 359 p.

O' NEILL, Barrett. **Semi-Riemannian Geometry**: with applications to relativity. New York: Academic Press, 1983. 468 p.

SCHUTZ, Bernard F. **A first course in General Relativity**. 2.ed. New York: Cambridge University Press, 2009. 393 p.

Como citar este trabalho:

COUTO, A. O. F.; ANDRADE, A. F. A estrutura do espaço de Minkowski. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI), III., 2019. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *Campus* Formiga, 2019.