LAGRANGIANA DE UMA CARGA EM UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

LOBATO, Lucas Augusto de Oliveira[1]; ANDRADE, Alcides[2]

[1]Estudante do Curso Técnico em Eletrotécnica Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais - *Campus* Formiga. E-mail: lucasllobato@hotmail.com
[2]Professor orientador do IFMG - *Campus* Formiga. E-mail: alcides.andrade@ifmg.edu.br

Resumo: Uma carga em um campo eletromagnético experimenta uma força conhecida como força de Lorentz. Diferentemente da formulação newtoniana, que é baseada na segunda lei de Newton, portanto vetorial, a abordagem da mecânica analítica parte de uma função escalar, chamada função lagrangiana. Neste trabalho, construímos a lagrangiana não relativística de uma partícula carregada em um campo eletromagnético externo.

Palavras-chave: Lagrangiana. Campo. Eletromagnético.

1 INTRODUÇÃO

A mecânica de newtoniana é uma teoria fundamentada no formalismo vetorial. Para descrever a dinâmica de um sistema mecânico de massa m e momento linear $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, partimos da equação fundamental, que é a segunda Lei de Newton

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt},$$

em que $\boldsymbol{F}$ é a força externa resultante.

Em geral, os sistemas mecânicos estão sujeitos a vínculos que são restrições de natureza geométrica ou cinemática. Desse modo, por $\boldsymbol{F}$ exigir o conhecimento de todas as forças aplicadas ao sistema, tanto o aparecimento explícito das forças de vínculo como a ocorrência de variáveis redundantes, tornam a solução do problema em um trabalho inconveniente e pouco econômico (LEMOS, 2007).

Lagrange desenvolveu um formalismo completamente escalar no qual aparecem somente variáveis independentes e arbitrárias, e que não necessita do conhecimento das forças de vínculo. Sua abordagem é baseada na função lagrangiana

$$L = K - U,$$

em que $K = \frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética, e U a energia potencial do sistema. Essa lagrangiana, por envolver uma energia cinética de baixas velocidades, é uma lagrangiana não relativística.

As equações dinâmicas da mecânica lagrangiana são dadas pelas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

em que q_i são as coordenadas generalizadas, $\dot{q}_i$ as velocidades generalizadas e $i = 1,2,\ldots,n$ o número de graus de liberdade do sistema (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001; SYMON, 1971).

A mecânica lagrangiana está inserida em um contexto mais amplo conhecido como mecânica analítica devido principalmente aos trabalhos de d'Alembert, Euler, Poisson, Jacobi, Hamilton e Noether. Ela está na base da estrutura de teorias como a mecânica estatística, a mecânica quântica, a teoria de campos, a teoria do caos e os sistemas dinâmicos. Não é exagero afirmar que a física teórica tem a mecânica analítica como um de seus pilares.

O eletromagnetismo de Maxwell é uma teoria baseada no campo eletromagnético, isso significa que a descrição de um sistema eletromagnético envolve o conhecimento dos campos elétrico $\boldsymbol{E}$ e magnético $\boldsymbol{B}$. Se uma partícula de carga e se mover em uma região do espaço em que exista um campo eletromagnético, ela sofrerá uma força eletromagnética resultante que é conhecida como força de Lorentz (GRIFFITHS, 2010; HEALD; MARRION, 1995).

Segundo o formalismo newtoniano, a descrição da dinâmica dessa carga se resume a resolver um sistema de equações diferenciais, e ela exige o conhecimento da força resultante sobre a partícula. Na descrição escalar, também devemos resolver um sistema de equações diferenciais, mas partimos da lagrangiana da partícula, ou seja, de uma única função escalar, necessitando conhecer somente a energia potencial do sistema.

O objetivo deste trabalho é construir a lagrangiana de uma carga não relativística na presença de um campo eletromagnético externo.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Por se tratar de um trabalho essencialmente teórico e formal, foram utilizados livros clássicos sobre os seguintes temas: mecânica analítica e eletromagnetismo. Neles estão os principais elementos para o desenvolvimento desse trabalho: (1) o entendimento da estrutura da função lagrangiana e das equações de Euler-Lagrange; (2) a compreensão da dinâmica do campo eletromagnético em termos dos potenciais escalar e vetor, e as equações de Maxwell.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma partícula de carga $\boldsymbol{e}$ que se move, com velocidade $\boldsymbol{v}$, na presença de um campo eletromagnético sofre uma força

$$\boldsymbol{F} = e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}),$$

chamada força de Lorentz.

Em termos dos potenciais escalar $\boldsymbol{\Phi}$ e vetor $\boldsymbol{A}$, os campos são dados por

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial A}{\partial t},$$

e

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

Os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ não são univocamente determinados, existem infinitos $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{A}$ para um mesmo campo eletromagnético. Esta liberdade estabelece uma arbitrariedade na escolha do calibre na teoria eletromagnética, ou seja, $\boldsymbol{\Phi}$ e $\boldsymbol{A}$ podem ser escolhidos, a menos de uma função χ, cujas derivadas são nulas,

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi,$$

e

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

para produzirem o mesmo campo eletromagnético (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1991).

A energia potencial dessa carga será dada por

$$U = e\,\Phi - e\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A},$$

sendo assim,

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - e(\Phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}).$$

será a lagrangiana procurada.

4 CONCLUSÃO

Uma partícula carregada submetida a um campo eletromagnético experimenta uma força de Lorentz. Como o campo eletromagnético depende dos potenciais, que não são univocamente determinados, existe uma liberdade na escolha do calibre como por exemplo, o calibre de Coulomb e o calibre de Lorentz, que são usados para tratar as ondas eletromagnéticas em termos dos potenciais. A descrição a partir da lagrangiana tem uma grande vantagem sobre a newtoniana, ela permite realizar o tratamento quântico de um sistema. A primeira quantização, fundamentada no operador hamiltoniano, necessita do conhecimento da função hamiltoniana, a qual é obtida a partir da função lagrangiana.

REFERÊNCIAS

COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, Bernard; LALOË, Franck. **Quantum mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1991. v. 1. 914 p.

GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles; SAFKO, John. **Classiacal mechanics**. 3. ed. San Francisco: Addison-Wesley, 2001. 638 p.

GRIFFITHS, David J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Education, 2010. 424 p.

HEALD, Mark; MARRION, Jerry B. **Classical eletromagnetic radiation**. 3. ed. Philadelphia: Saunders College Publishing, 1995. 572 p.

LEMOS, Nivaldo A. **Mecânica analítica**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007. 386 p.

SYMON, Keith. **Mechanics**. 3. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing, 1971. 639 p.

Como citar este trabalho:
LOBATO, L. A. de O.; ANDRADE, A. F. Lagrangiana de uma carga em um campo eletromagnético. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI), III., 2019. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *Campus* Formiga, 2019. ISSN – 2674-7111.